Л. М. ЛОПОВОК

СБОРНИК СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Под редакцией *А. Д. Посвянского.*

Утверждено
Министерством просвещения РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА 1950

Данный сборник является одним из первых откликов на педагогические воззрения проф. Н. Ф. Четверухина, изложенные в его книге „Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии“ и в брошюрах о стереометрических задачах. Эти работы ставят своею целью развитие пространственного представления учащихся путём эффективного решения задач на построение.

Сборник содержит довольно обширный материал по стереометрическим построениям, подобранный с соблюдением постепенного нарастания трудностей.

Материал сборника бесспорно представляет интерес для учителя математики и окажет помощь в его работе.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *А. А. Борисов.* Техн. редактор *М. Д. Петрова*

Подписано к печати 17/VII 1950 г. А 02899. Бумага 84х108$^{1}/_{32}$.
Бумажн. л. 1,13. Печатных л. 3,69. Учётно-изд. л. 4 26. Тираж
25 тыс. экз. Цена без переплёта 1 р. 30 к. Заказ 5605.
Отпечатано с матриц Первой Образцовой типографии
им. А. А. Жданова.

11-я типография Росполиграфиздата при Совете Министров РСФСР
г. Горький, ул. Фигнер, 32.

ВВЕДЕНИЕ

Все стереометрические изображения на плоскости, о которых речь будет идти ниже, выполняются учащимися при помощи тех же инструментов, которыми они пользовались при выполнении планиметрических построений. Введение каких-либо иных инструментов, кроме линейки и циркуля (а также применяемого для упрощения работы чертёжного угольника), не предполагается.

Большинство задач этого сборника (§§ 1—3, 5, часть § 4) относится к числу так называемых эффективных, т. е. допускают решение при помощи линейки и циркуля со строгим обоснованием правильности построения каждой точки искомой фигуры. Предлагаемые упражнения рекомендуется использовать с первых уроков стереометрии в IX классе.

Подробное и весьма строгое изложение теории эффективных пространственных построений на чертеже можно найти в книге проф. Н. Ф. Четверухина „Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии“ и в двух .его брошюрах „Стереометрические задачи на проекционном чертеже“. Коротко основные положения сводятся к следующему.

Чертежи пространственных фугур обычно получают при помощи параллельного проектирования. При этом:

1) точка изображается точкой;

2) прямая линия изображается прямой линией;

3) параллельные прямые изображаются параллельными прямыми;

4) угол между двумя пересекающимися прямыми при изображении этих прямых может произвольно измениться;

5) если точка M лежит на прямой AB, то изображение точки M лежит на изображении прямой AB;

6) величина отрезка при таком изображении может произвольно измениться.

Подробности применения этих свойств чертежа, выполненного в параллельных проекциях, выясняются при рассмотрении ряда задач сборника.

Из этих свойств проекционного чертежа вытекает, например, что квадрат может быть изображён произвольным параллелограмом, равносторонний треугольник — произвольным треугольником, трапеция — трапецией и т. д. Центру равностороннего треугольника на проекционном чертеже соответствует центр тяжести изображения, центру квадрата — точка пересечения диагоналей параллелограма, изображающего квадрат, и т. д. Настоящий задачник посвящён эффективным построениям на проекционном чертеже.

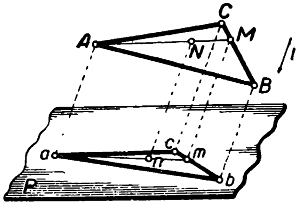
Эффективные построения противопоставляются построениям воображаемым. При воображаемых построениях мы лишь говорим „проведём через данную точку плоскость, параллельную данной плоскости“ и т. д., не осуществляя этого фактически.

В планиметрии мы постоянно выполняем эффективные построения, используя для этого чертёжные инструменты. В стереометрии же может подвергаться сомнению самая возможность эффективных построений. В самом деле, в планиметрии, чтобы провести прямую через две точки, надо приложить к ним линейку (допустим, что точки отмечены на листе бумаги) и провести по ней прямую. Но как в пространстве эффективно провести прямую через две точки? Может показаться, что для этого необходимо прибегать к изготовлению моделей.

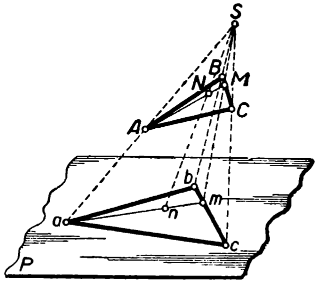
Есть два способа производить рассмотрения в пространстве. Первый способ аксиоматический. Он заключается в том, что постулируется возможность некоторых основных построений. Например: „Можно построить сферу, если дан её центр и одна точка на её поверхности“. В дальнейшем, производя стереометрическое построение, мы сводим его к основным. Мы говорим: „проводим сферу, имеющую центр в данной точке A и проходящую через данную точку B“, и считаем это построение эффективным в силу установленного постулата.

Однако достигаемая таким путём эффективность — чисто условная или кажущаяся. Хотя и в геометрии на плоскости можно поставить всю теорию построений на аксиоматическую почву, но там постулаты построений соответствуют чертёжной практике. Постулат „можно построить прямую, проходящую через две данные точки“ есть аксиоматический эквивалент линейки, а постулат „можно построить окружность, если дан её центр и одна точка на ней“ отображает практику использования циркуля. Планиметрическое построение, выполненное „словесно“, т. е. сведённое к основным построениям, всегда может быть реализовано на бумаге. В стереометрии же аксиоматический способ не связан ни с какой практикой. Не существует материального инструмента, проводящего сферу по данному центру и данной точке на ней. Поэтому аксиоматический метод в теории построений, значение которого для некоторых целей очень велико, не может рассматриваться как метод, делающий стереометрические построения эффективными.

Второй способ заключается в том, чтобы производить стереометрические построения на чертеже, где они могут выполняться не только на словах, а эффективно. Но для этого надо условиться о правилах обращения с чертежом. Надо установить, как изображаются на чертеже пространственные образы, что значит „дана точка“, как надо понимать требование „найти прямую“ и т. д.



Черт. 1.



Черт. 2.

Какими же особенностями должен обладать проекционный чертёж, чтобы на нём возможно было эффективно производить решения пространственных задач, т. е. фактически строить на чертеже искомые элементы? Работы проф. Н. Ф. Четверухина, о которых упоминалось выше, полностью отвечают на этот вопрос. В этих работах автор предлагает следующий способ изображения точек пространства.

Представим себе в пространстве некоторую плоскость P (для определённости горизонтальную плоскость, которую в дальнейшем будем называть **основной** плоскостью). Далее, пусть какие-либо точки A, B, C спроектированы параллельно по какому-либо направлению l или центрально из какой-нибудь точки S на эту плоскость (черт. 1 и 2). Эти проектирования будем называть „внутренними“ в отличие от „внешнего“ параллельного проектирования, с помощью которого получены чертежи 1 и 2. Будем считать точки A, B, C „заданными“ на изображении, если помимо изображений самих точек A, B, C даны и изображения a, b, c их внутренних проекций на основную плоскость. Для краткости будем называть внутренние проекции a, b, c основаниями проектирующих прямых, проходящих соответственно через точки A, B, C. При помощи „заданных“ на чертеже точек можно „задавать“ прямые и плоскости. Так, например, на чертежах 1 и 2 прямые AB, BC и AC являются заданными, так как каждая из них имеет две заданные точки, и, стало быть, легко построить основание произвольной точки M любой из этих прямых. Аналогично, плоскость ABC также является заданной, так как определяется тремя заданными точками, и, стало быть, легко построить и основание произвольной точки N этой плоскости.

Здесь уместно сделать одно замечание, касающееся системы обозначений. Обычно в учебной литературе по геометрии не делается чёткого разграничения между оригиналом и изображением (чертежом). Это отсутствие разграничения выражается в том, что элементы оригинала и изображения этих элементов обозначаются одними и теми же буквами. Когда мы рассматриваем в книге чертёж, изображающий правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$, то необходимо иметь в виду, что фигура $SABCD$ на странице книги — это не пирамида, а её параллельная проекция, сама же пирамида занимает какое-то положение в пространстве. Мы говорим „ребро AB“, подразумевая под этим иногда ребро пирамиды-оригинала, а иногда отрезок на чертеже. Такой способ обозначений может привести к путанице. Например, когда мы читаем в тексте „$AB \perp BC$“, то надо понимать, что речь идёт об оригинале, так как на чертеже отрезки AB и BC не перпендикулярны. Утверждение, что AB параллельно CD справедливо и для оригинала, и для изображения, а утверждение, что угол между AB и BC равен, например, 135°, относится только к изображению.

Для устранения этого неудобства было бы желательно ввести следующую систему обозначений. Элементы оригинала обозначаются буквами со штрихами („точка A'“, „прямая a'“), а их изображения — теми же буквами без штрихов („точка A“, „прямая a“)[1]. Тогда не требовали бы никаких пояснений записи: $A'B' \perp B'C'$, $\angle ABC = 135°$.

Однако мы не решаемся ввести в этой книге систему обозначений, столь непривычную и не совпадающую с обозначениями, принятыми во всех учебниках и задачниках. Поэтому мы ограничиваемся приведённым разъяснением и следующим предупрежде-

---

[1] Эта система является общепринятой в современной научной литературе по начертательной геометрии.

нием: встречая в тексте соотношения между различными геометрическими элементами, читатель должен каждый раз сам судить, о чём идёт речь — об оригинале или об изображении. Обычно сомнение возникать не должно.

Возвращаясь к вопросу о задании пространственных элементов на проекционном чертеже, мы можем сформулировать следующее положение: **определяя новые точки, прямые и плоскости через уже заданные, мы всегда будем иметь на чертеже изображения фигур, все точки которых являются заданными.** Это обстоятельство позволяет решать на чертеже позиционные задачи на построение любых инциденций двух каких-либо элементов[1]), например, на построение точки пересечения какой-либо прямой с плоскостью или линии пересечения двух плоскостей и т. д. Чертёж, на котором для любой изображённой на нём точки определено её основание, причём для одних точек эти основания показаны, а для других могут быть построены, обладает, как говорят, свойством полноты[2]).

Таким образом, для эффективного решения позиционных задач на проекционном чертеже последний должен обладать свойством полноты.

Однако полный чертёж ещё не определяет метрических свойств оригинала. Так, например, параллелограм может служить изображением как произвольного параллелограма, так и прямоугольника или квадрата. Поэтому для того чтобы полный чертёж обладал также и метрической полнотой или, как говорят, **метрической определённостью**[3]), надо наложить на него дополнительные условия, которым удовлетворяет оригинал, скажем, оговорить, что тот или иной параллелограм является изображением квадрата или то, чтó

---

[1]) Инциденцией двух геометрических элементов называется элемент, находящийся в совмещении с каждым из этих двух элементов и вполне определяемый этими элементами. Так, инциденция прямой и плоскости есть точка их пересечения, инциденция двух точек есть прямая, проходящая через эти точки.

[2]) Изображение называется полным, если любая инциденция, которая определена на оригинале, определена также и на изображении. Таким образом, на полном изображении инциденция изображённых на нём элементов не должна отмечаться произвольно, а должна находиться однозначно. Подробности см. в книге Н. Ф. Четверухина „Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии“, стр. 50.

[3]) Метрически определённым называется изображение, в котором определена форма какого-либо тетраэдра изображения (Н. Ф. Четверухин. Чертежи пространственных фигур в геометрии).

изображается на чертеже в виде четырёхгранной пирамиды, в оригинале представляет собой правильный тетраэдр. Такой чертёж, сопровождающийся условиями, наложенными на оригинал, будем называть **условным.**

Таким образом, для эффективного решения метрических задач на проекционном чертеже последний должен помимо полноты обладать также и метрической определённостью, позволяя восстановить оригинал с точностью до подобия, иначе говоря, чертёж должен полностью определить форму оригинала.

Предлагаемые задачи на построение по своему отношению к чертежу можно разбить на три типа:

1) позиционные задачи, эффективно решаемые на полном чертеже,

2) метрические задачи, эффективно решаемые на метрически определённом чертеже, и

3) задачи, решаемые в воображении при помощи некоторого количества мысленных операций в пространстве, которые могут сопровождаться для наглядности иллюстративным чертежом (т. е. „неполным“ и „метрически неопределённым чертежом“).

Предлагаемые задачи на построение, за исключением некоторой части задач § 4, можно свести к двум типам:

1) построение изображения (точки, прямой, многогранника, тела вращения);

2) построение сечения тела плоскостью или взаимного пересечения двух тел.

В последнем случае иногда может быть дополнительное требование: построить истинную величину искомого сечения.

Задачи первого типа рассмотрены в параграфах 1 и 5. Задачи второго типа решаются либо при помощи следов плоскостей (см. задачи 75—81 § 2), либо при помощи метода соответствия (см. задачу 13, § 3), либо алгебраически (если заданное изображение метрически определённо).

По поводу методов решения задач можно прежде всего сделать одно общее замечание. Для эффективного решения любой стереометрической задачи на построение следует **разыскивать такие соотношения между элементами оригинала, которые сохраняются (инварианты) при параллельном проектировании на плоскость.** Рассмотрим, например, задачу 5, иллюстрируемую чертежом 10 (стр. 16). В правильном пятиугольнике *ABCDE* (имеется в виду оригинал) можно подметить, например, следующие соотношения:

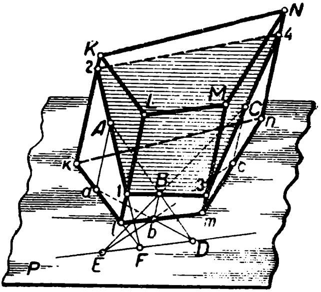
1) стороны *AB*, *BC* и т. д. равны между собой;

2) $\sphericalangle ABC = 108^\circ$;

3) $AD \parallel BC$;

4) $AF:FD = (1+\sqrt{5}):2$ (F — точка пересечения диагоналей AD и CE).

Соотношения 1) и 2) не могут быть использованы для построения на чертеже, так как они не сохраняются (не инварианты) при параллельном проектировании, а соотношения 3) и 4) могут. Надо всегда искать такие соотношения, как 3) и 4), т. е. соотношения, инвариантные относительно параллельного проектирования.



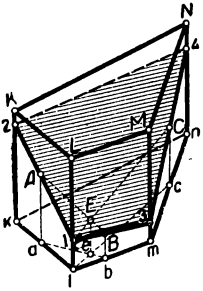
Черт. 3.

Рассмотрим два примера.

1. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, если сечение задано тремя точками A, B, C на боковых гранях призмы (черт. 3).

Примем плоскость нижнего основания призмы за основную плоскость и выберем направление проектирования, параллельное рёбрам $Kk \parallel Ll \parallel Mm \parallel Nn$ призмы. Тогда точки a, b и c будут основаниями точек A, B и C.

Строим точку встречи прямой AB с плоскостью P ($AB \times P = D$). Так же находим $BC \times P = E$. DE — след плоскости искомого сечения на основной плоскости. Продолжим сторону основания kl этой призмы до пересечения в точке F со следом плоскости. Прямая AF пересекает рёбра Kk и Ll в точках 2 и 1, которые будут вершинами многоугольника искомого сечения. Пересечение прямой $1B$ с ребром Mm даст точку 3, пересечение прямой $3C$ с ребром Nn даст точку 4. Так найдены все вершины искомого сечения. Обоснование достаточно очевидно.

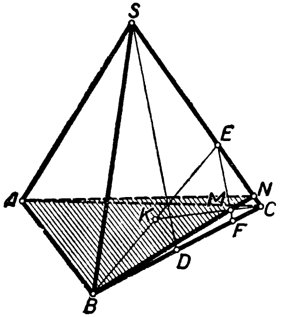


Черт. 4.

При построении по методу соответствия следует поступить следующим образом. Точки нижнего основания данной призмы и точки искомого сечения взаимно однозначно соответственны (аффинитет). Прямой ab (черт. 4) соответствует прямая AB, прямой lc — прямая $1C$. Точка e, в которой пересекаются прямые ab и lc, соответствует точке

E, которую легко найти, проведя из e прямую, параллельную боковому ребру призмы: $E = AB \times eE$. Пересечение CE с ребром Ll даст точку 1, которая и будет одной из вершин искомого сечения. Дальнейшее построение аналогично рассмотренному выше.

2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ в 3 раза больше стороны основания её. Провести через сторону AB сечение, перпендикулярное противолежащему боковому ребру (черт. 5).



Черт. 5.

Прежде всего заметим, что чертёж 5 является метрически определённым, так как определена форма данного тетраэдра.

Отложим на ребре SC отрезок $CE = {}^1/_8\, SC$. Тогда $CE = BC$, и треугольник BEC — равнобедренный. Одна высота его — CK — делит пополам сторону BE, вторая EF параллельна апофеме SD грани BSC. Точка M пересечения CK и EF будет ортоцентром треугольника BEC. Проведя через B и ортоцентр M прямую до пересечения в точке N с ребром SC, найдём вершину искомого сечения ANB. В самом деле, $BN \perp SC$, аналогично и $AN \perp SC$, следовательно, плоскость $ANB \perp SC$.

Алгебраический метод решения в данном случае, пожалуй, даёт более лёгкое решение. В самом деле, из подобия треугольников BNC и DSC вытекает пропорция $CN : BC = DC : SC$. Отсюда:

$$CN = \frac{BC \cdot DC}{SC} = \frac{\frac{SC}{3} \cdot \frac{SC}{6}}{SC} = \frac{SC}{18}.$$

Следовательно, отложив $CN = \frac{1}{18} SC$, мы сразу нашли бы вершину искомого сечения.

Выбор метода решения, вообще говоря, зависит от решающего задачу. После разбора определённого количества упражнений вырабатываются навыки выбора наиболее рационального способа решения задачи. При этом, однако, следует иметь в виду, что при построении сечения плоскостью, мало наклонённой к плоскости проекций, след плоскости оказывается слишком удалённым от основного изображения, что вынуждает либо изменить масштаб чертежа, либо отказаться от использования следов плоскости. Иногда, наоборот, невыгоден метод соответствия, так как обилие вспомогательных линий, сосредоточенных в наиболее существенной части чертежа, затрудняет и построение, и чтение рисунка.

Алгебраический метод применим не всегда, а лишь в тех случаях, когда изображение не только полное, но и метрически определённое (как это имело место, например, во втором из рассмотренных примеров).

Многие из задач настоящего сборника допускают решение не одним методом. Желательно, чтобы при работе со сборником были сделаны попытки отыскания различных путей решения задач.

В § 4 собраны задачи на пространственные геометрические места. Объединение этих задач в один параграф чисто тематическое, использовать же эти задачи следует на протяжении всего курса стереометрии. Некоторую помощь при решении задач этой группы могут оказать § 73 учебника геометрии и тригонометрии (для учительских институтов) А. Н. Перепёлкиной и С. Н. Новосёлова и вторая часть учебника геометрии Н. А. Глаголева. Ряд упражнений и указаний содержит вторая часть учебника по элементарной геометрии для педагогических институтов Д. И. Перепёлкина. Ряд указаний можно найти во второй части „Элементарной геометрии“ Ж. Адамара (§§ 349, 356, 366, 370, 382, 387, 462, 472, 473, 474, 476, 484).

Небольшая часть задач § 4 допускает и эффективное решение, основанное на изложенных выше принципах. Таковы, например, задачи:

№ 9. На поверхности правильной пирамиды найти точки, равноудалённые от точек A и B на высоте пирамиды.

№ 19. На сторонах AB и CD основания правильной четырёхугольной призмы даны точки M и N так, что $AM = NC$. Найти на поверхности призмы точки, равноудалённые от точек M и N.

№ 67. На поверхности правильного тетраэдра найти точки, равноудалённые от двух его граней.

Однако около 60 задач этого параграфа принадлежат к типу задач, решаемых в воображении и, следовательно, не требуют полного или метрически определённого чертежа. Здесь имеется в виду развитие пространственного воображения, задачи рассчитаны на определённую догадку учащихся. Дать подробные указания к решению этих задач нелегко, так как геометрические места весьма разнообразны. Однако во многих задачах настоящего сборника помогает известная аналогия с плоскостными геометрическими местами точек.

Так, например, на плоскости геометрическим местом точек, отношение расстояний которых от двух данных точек равно $m:n$ $(m \neq n)$, будет окружность[1]). В пространстве таким геометрическим местом будет сфера.

На плоскости геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек, будет прямая (ось симметрии этих точек); в пространстве в этом случае мы получим плоскость. Если на плоскости геометрическое место состояло из пары параллельных прямых („геометрическое место точек, удалённых на данное расстояние от данной прямой“), то в пространстве часто искомым геометрическим местом точек явится цилиндрическая поверхность.

Ещё один пример. На плоскости равноудалённых от сторон треугольника точек будет 4 (центры вписанной и вневписанных окружностей); в пространстве геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон треугольника, будут 4 перпендикуляра к плоскости треугольника, проходящие через названные центры окружностей.

Поэтому можно рекомендовать при решении ряда задач § 4 следующий приём.

Пусть требуется построить геометрическое место точек, обладающих определённым геометрическим свойством. Ищем на плоскости соответствующее геометрическое место точек. Непрерывное движение (поступательное или вращательное) полученной фигуры в пространстве даст искомое геометрическое место точек. Часто получается следующая зависимость между формой геометрического места на плоскости и в пространстве.

На плоскости	В пространстве
точка	прямая
прямая	плоскость
две параллельные прямые	цилиндрическая поверхность
окружность	сфера

---

1) Она называется окружностью Аполлония.

Необходимо ещё оговорить, что предлагаемый приём и таблица не обладают общностью, и их следует рассматривать лишь как методические указания, облегчающие нахождение искомого геометрического места в ряде задач § 4.

Помимо задач на нахождение геометрических мест точек в пространстве, § 4 содержит и задачи на нахождение геометрических мест линий (в частности прямых), для которых очевидных аналогий на плоскости нет. Это в известной мере затрудняет решение задач такого рода, но, как показывает опыт, учащиеся быстро осваиваются и с этими геометрическими местами.

И, наконец, могут быть геометрические места, непосредственно связанные с поверхностями. Например:

Найти геометрическое место точек, из которых видна данная часть поверхности данного шара.

Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки *A* на плоскости, проходящие через точку *B*.

В этих случаях аналогии отыскиваются труднее. Решение таких задач может быть успешным лишь в том случае, когда учащиеся уже приобрели определённые навыки решения задач на пространственные геометрические места и обладают хорошими пространственными представлениями. Это обстоятельство, конечно, ограничивает возможности использования задач последнего типа, но не должно служить поводом для полного отказа от таких упражнений.

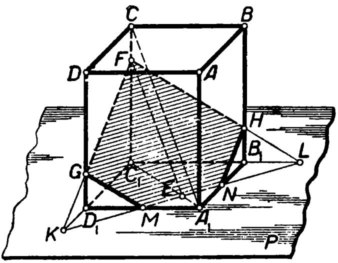
Другой особенностью задач о пространственных геометрических местах является необходимость (как и при решении планиметрических задач на построение) исследования результата решения, т. е. определения количества точек, линий, плоскостей и т. п., отвечающих условию задачи при различных взаимоотношениях исходных данных.

Пусть, например, требуется найти на плоскости *P* точки, равноудалённые от точек *A* и *B*. Иногда можно получить от учащихся ответ: „Искомым местом точек будет прямая, по которой плоскость *P* пересекается с плоскостью симметрии точек *A* и *B*“. Однако этим ответом нельзя удовлетвориться, так как он верен лишь в том случае, когда прямая *AB* не перпендикулярна плоскости *P*. Если же $AB \perp P$, то могут представиться два случая: 1) *A* и *B* симметричны относительно плоскости *P*. 2) *A* и *B* не симметричны относительно плоскости *P*. В первом случае условию отвечает любая точка плоскости *P*, т. е. вся плоскость *P*, а во втором — на плоскости *P* нет ни одной точки, отвечающей условию задачи.

Подобные исследования, сопровождающиеся соответствующими чертежами, необходимо проводить и в других случаях. Именно в процессе этих исследований открываются богатейшие возможности формирования у учащихся чётких пространственных представлений.

В заключение следует заметить, что стереометрические задачи на построение отнюдь не противопоставляются задачам на вычисление. Прежде всего, навыки, приобретённые учащимися в процессе решения задач на построение, помогут правильно выполнять чертежи к задачам на вычисление. Значение этой части работы трудно переоценить.

С другой стороны, имеется возможность дополнить условие задачи на построение определёнными числовыми данными. Тогда можно будет потребовать не только выполнить построение, но и произвести некоторые вычисления (например, найти площадь или периметр сечения, определить объём отсечённой части многогранника, узнать, в каком отношении плоскость делит поверхность тела, и т. п.).



Черт. 6.

Примером такой обработки условия задачи на построение может служит следующая задача.

„Через середины сторон A_1B_1 и A_1D_1 основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали A_1C. Зная, что измерения параллелепипеда AB, AD и AA_1 относятся, как 3:4:12, а диагональ параллелепипеда равна 39 *см*, определить, на какие части эта плоскость делит объём параллелепипеда“ (черт. 6).

Если середины сторон A_1B_1 и A_1D_1 суть точки M и N, то прямая MN — след искомой плоскости. Построить сечение довольно просто. Последовательно проводим: $A_1C_1 \times$ $\times MN = E$, $EF \parallel A_1C$ (найдём F); $MN \times C_1B_1 = L$; $MN \times$ $\times C_1D_1 = K$; $FK \times DD_1 = G$ и $FL \times BB_1 = H$. Искомое сечение $MGFHN$.

Несложные вычисления показывают, что измерения параллелепипеда 9 *см*, 12 *см* и 36 *см*. Определив объёмы пирамид FKC_1L, GKD_1M и HNB_1L и объём параллелепипеда, найдём, что секущая плоскость делит объём параллелепипеда на две части, объёмы которых составляют 1012,5 и 2875,5 *см*^{3}.

Задач такого рода немало в известном сборнике Дзыка („Сборник стереометрических задач на комбинации геометрических тел"), они могут быть получены и путём некоторой обработки задач настоящего сборника.

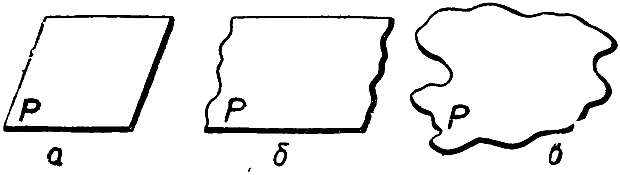
Так или иначе, решение стереометрических задач на построение принесёт учащимся огромную пользу, будет содействовать развитию пространственных представлений и глубокому усвоению программного материала.

Этот сборник содержит около 600 задач, в основном соответствующих программе IX—X классов средней школы. Большинство задач может быть использовано для работы с учащимися, но основной задачей сборника является оказание помощи в повышении квалификации учителю средней школы и студенту физико-математического факультета педагогического или учительского института.

§ 1. Стереометрические изображения

1. Построить изображение произвольной плоскости P.

Так как плоскость безгранична, то мы можем изобразить лишь некоторую часть её. Форма этого куска плоскости может быть произвольной, и, следовательно, чертежи *7а*, *7б* и *7в* равноправны, однако рекомендуется избегать изображения *7а*, так как оно без надобности обладает метрической определённостью.



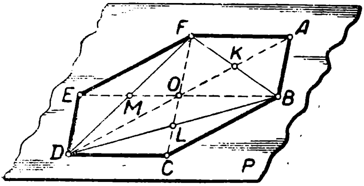
Черт. 7.

2. Построить изображения следующих фигур, произвольно расположенных в пространстве: равностороннего и прямоугольного треугольников, параллелограма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции.

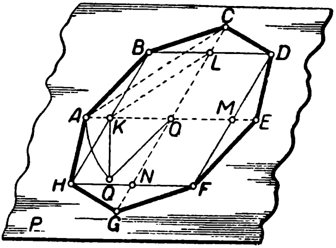
3. Построить изображение правильного шестиугольника.

Изображение правильного шестиугольника весьма просто получить из изображения правильного треугольника. Построив какой-либо треугольник BDF, можно считать его изображением правильного треугольника (черт. 8). Точка O пересечения медиан BM, DK и FL будет являться изображением центра правильного шестиугольника, а тогда, проведя $BA \parallel OF$, $BC \parallel OD$ и т. д., получим изображение $ABCDEF$ правильного шестиугольника.

4. Построить изображение правильного восьмиугольника. Искомое изображение можно получить из изображения квадрата. Произвольный параллелограм $BDFH$ может служить изображением квадрата (черт. 9). Проводим средние линии AE и CG параллелограма. Чтобы найти на средних линиях точки, соответствующие остальным вершинам восьмиугольника, определим отношение $AO:KO = CO:LO = R: \frac{R\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}:1$. Отсюда получим простой способ построения вершины A. Строим прямоугольный равнобедренный треугольник OKQ и откладываем $OA = OQ$. Вершину C найдём, проведя $AC \parallel KL$. Построение остальных вершин аналогично.



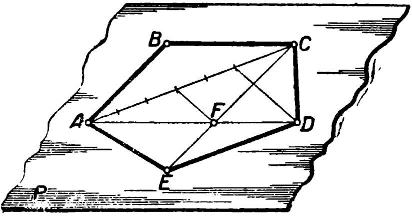
Черт. 8.



Черт. 9.

5. Построить изображение правильного пятиугольника.

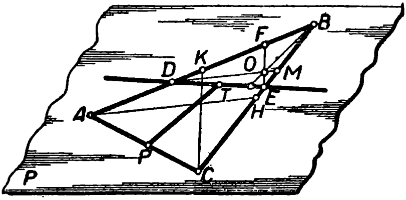
Построение основывается на том, что диагонали правильного пятиугольника параллельны соответствующим сторонам его. Поэтому строим параллелограм $ABCF$ (черт. 10), и тогда остаётся построить вершины D и E.



Черт. 10.

Применяя теорему Птоломея к правильному пятиугольнику, сторона которого a, получим для определения его диагонали x следующее уравнение: $x^2 = ax + a^2$. Оно имеет один положительный корень: $x=\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$. Тогда $AF:FD=$ $=(1+\sqrt{5}):2\approx3:2$.

6. Дано изображение равностороннего треугольника ABC, пересечённого прямой DE. Из точки P на стороне AC (не пересечённой прямой DE) опустить перпендикуляр на прямую DE.

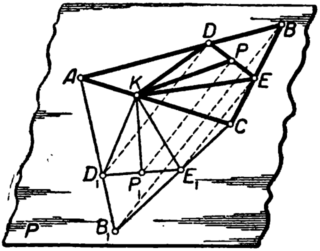


Черт. 11.

Из вершин A и C проводим медианы AH и CK треугольника ABC, им в оригинале соответствуют высоты данного треугольника. Проведя $DM \parallel AH$ и $EF \parallel CK$, найдём ортоцентр O треугольника DBE. Значит, $BO \perp DE$. Искомая прямая PT параллельна BO (черт. 11).

7. ABC — изображение равностороннего треугольника. Треугольник DEK — изображение треугольника, вписанного в оригинал. Требуется провести высоту к стороне DE в треугольнике DEK.

Задача сводится к предыдущей. Однако, как и в предыдущей, здесь возможен и иной путь решения. Построив на стороне AC равносторонний треугольник ACB_1, получим истинную форму треугольника ABC. Соединим B с B_1 и проведём из точек D и E прямые, параллельные BB_1. Так мы найдём точки D_1 и E_1, которые соответствуют точкам D и E. Проведём в треугольнике D_1KE_1 высоту KP_1 и построим соответственную точке P_1 точку P в треугольнике DEK. Искомой высотой будет KP (черт. 12).



Черт. 12.

8. Дана плоскость P. Показать на чертеже точку M, лежащую вне этой плоскости.

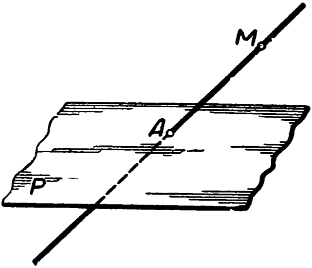
Выберем на плоскости P точку A и проведём прямую MA (черт. 13). Если бы точка M лежала в плоскости P, то прямая MA была бы видна целиком. В данном случае часть её показана пунктиром. Следовательно, прямая MA пересекает плоскость P и точка M лежит вне плоскости P.

Точку пересечения прямой с плоскостью (в данном случае A) называют точкой встречи прямой с плоскостью.

9. Построить изображение произвольной призмы.

10. Построить изображение прямой призмы.

Обычно принято по соображениям наглядности перпендикуляр к основной плоскости изображать в виде вертикальной линии.



Черт. 13.

11. Построить изображение правильной треугольной призмы.

12. Построить изображение правильной четырёхугольной призмы.

13. Построить изображение правильной шестиугольной призмы.

14. Построить изображение правильной восьмиугольной призмы.

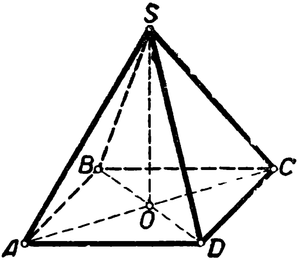
15. Построить изображение правильной пятиугольной призмы.

16. Построить изображение произвольной пирамиды.

17. Построить изображение правильной четырёхугольной пирамиды:

Строим произвольный параллелограм $ABCD$, изображающий квадратное основание пирамиды, через точку O пересечения его диагоналей проводим вертикально SO, изображающую направление высоты пирамиды. Отмечаем вершину пирамиды S на прямой SO и соединяем её с вершинами основания (черт. 14).

Здесь и в дальнейшем необходимо на изображениях правильных пирамид указывать их высоту.



Черт. 14.

18. Построить изображение правильной треугольной пирамиды.

19. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды.

20. Построить изображение правильной пятиугольной пирамиды.

Указание. Центр правильного пятиугольника лежит на пересечении прямых, каждая из которых соединяет вершину пятиугольника с серединой противоположной стороны его.

21. Построить изображение пирамиды, у которой основание квадрат, боковые рёбра попарно равны, а один из двугранных углов при основании тупой.

22. Построить изображение правильной шестиугольной призмы, одна из боковых граней которой лежит в данной плоскости.

23. Построить изображение правильной восьмиугольной призмы, одна из боковых граней которой лежит в данной плоскости.

24. Построить изображение правильной четырёхугольной пирамиды, одна из боковых граней которой лежит в данной плоскости.

25. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды, одна из боковых граней которой лежит в данной плоскости.

26. Изобразить куб с вписанной в него правильной четырёхугольной пирамидой, имеющей с кубом соответственно равные основания и высоты.

27. Изобразить куб с вписанной в него правильной четырёхугольной пирамидой, у которой высота равна боковому ребру куба, а площадь основания вдвое меньше площади грани куба[1].

28. Изобразить правильную шестиугольную призму с вписанной в неё правильной треугольной пирамидой, высота которой равна боковому ребру призмы, а площадь основания вдвое меньше площади основания призмы.

29. Изобразить правильную шестиугольную призму с вписанной в неё правильной треугольной пирамидой, высота которой равна высоте призмы, а площадь основания — наименьшая возможная.

Легко убедиться, что вершины основания искомой пирамиды совпадают с серединами трёх сторон основания призмы, взятых через одну.

30. Правильные шестиугольные пирамида и призма имеют общее основание и равные высоты. Построить их изображение.

31. Изобразить правильную треугольную призму, описанную около пирамиды, высота и основание которой соответственно равны высоте и основанию пирамиды.

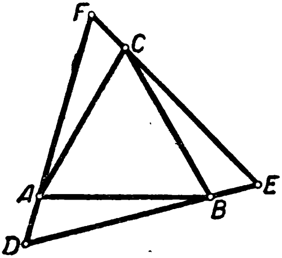
32. Изобразить правильную треугольную призму, описанную около правильной треугольной пирамиды $SABC$, имеющую высоту, равную высоте пирамиды, и наибольшую возможную площадь основания.

Задачу легко свести к следующей планиметрической задаче:

---

[1] Здесь и в дальнейшем, если не будет особых указаний, имеется в виду, что вершины основания вписанной фигуры лежат на сторонах основания данной фигуры.

Описать около равностороннего треугольника ABC равносторонний треугольник наибольшей площади. Нетрудно установить, что если равносторонний треугольник DFE описан около треугольника ABC (черт. 15), то $\triangle DAB = \triangle FCA = \triangle EBC$. Очевидно, площадь треугольника будет наибольшей тогда, когда наибольшей будет площадь треугольника ADB.

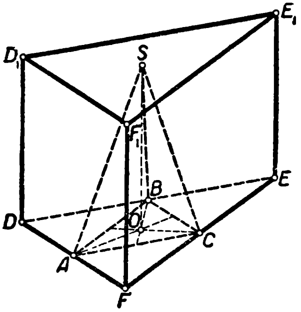


Черт. 15.

Этот треугольник имеет данное основание AB и данный угол при вершине $\angle ADB = 60°$. Как известно, из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую площадь[1]. Следовательно, $AD = DB$, т. е. стороны треугольника DFE вдвое больше сторон треугольника ADB. Отсюда вытекает построение, данное на чертеже 16.

Через вершины основания пирамиды проводим прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника ABC. Эти прямые пересекаются попарно в точках D, E и F. Через эти точки проводим прямые (параллельные высоте пирамиды) и откладываем на них отрезки $DD_1 = EE_1 = FF_1 = SO$.

Призма $DEFD_1E_1F_1$ искомая.



Черт. 16.

33. Изобразить правильную четырёхугольную призму, описанную около правильной четырёхугольной пирамиды, имеющую высоту, равную высоте пирамиды, и наибольшую возможную площадь основания.

34. Изобразить правильную шестиугольную призму, описанную около правильной шестиугольной пирамиды, имеющую высоту, равную высоте пирамиды, и наибольшую возможную площадь основания.

35. Изобразить правильную треугольную призму с вписанной в неё правильной шестиугольной пирамидой, имеющей высоту, равную боковому ребру призмы.

---

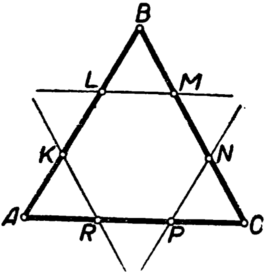
[1] См. С. М. Зетель, Задачи на максимум и минимум, стр. 21.

Задача сводится к проведению на основании призмы трёх прямых, соответственно параллельных сторонам основания призмы и отсекающих от этих сторон по одной трети (черт. 17).

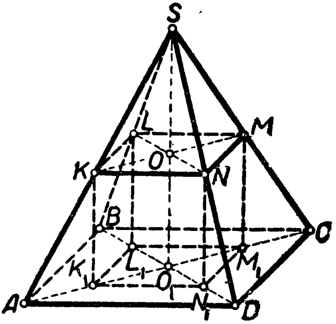
36. Изобразить правильную четырёхугольную пирамиду с вписанным в неё кубом, причём четыре вершины куба лежат в плоскости основания пирамиды, а четыре — на боковых рёбрах пирамиды.

Построение выполнено на чертеже 18.

Сначала строим правильную четырёхугольную пирамиду (черт. 14). Затем на диагоналях AC и BD отмечаем вершины K_1, L_1, M_1 и N_1 основания куба так, чтобы параллелограм $K_1L_1M_1N_1$ был подобен параллелограму $ABCD$. После этого находим верхнее основание куба, проводя через вершины нижнего основания прямые, параллельные высоте пирамиды, до пересечения с соответствующими боковыми рёбрами её. Дальнейшее ясно.



Черт. 17.



Черт. 18.

37. Изобразить правильную четырёхугольную пирамиду с вписанным в неё кубом, причём четыре вершины куба лежат в плоскости основания пирамиды, а четыре — на апофемах её боковых граней.

38. Изобразить октаэдр, вписанный в куб.

39. Изобразить куб, вписанный в октаэдр.

Задача аналогична задаче 37 настоящего параграфа.

40. Изобразить октаэдр, вписанный в правильный тетраэдр.

Последующие задачи § 1 знакомят с простейшими из так называемых полуправильных многогранников.

41. Изобразить многогранник, у которого 6 граней — правильные восьмиугольники, а 8 — равносторонние треугольники, полученный из куба срезанием углов.

42. Изобразить многогранник, полученный из куба срезанием углов, у которого 8 граней — равносторонние треугольники, а 6 — квадраты.

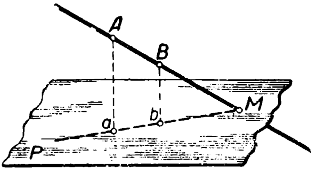
43. Изобразить многогранник, полученный из правильного тетраэдра срезанием углов, у которого 4 грани — равносторонние треугольники, а 4 — правильные шестиугольники.

44. Изобразить многогранник, полученный из правильного октаэдра, срезанием углов так, что у многогранника получится 6 граней квадраты, а 8 — правильные шестиугольники.

§ 2. Точка встречи прямой с плоскостью или многогранной поверхностью

Задачи этого параграфа в своём большинстве относятся к позиционным и потому требуют чертежа, обладающего только позиционной полнотой. Однако для небольшой части задач применяются чертежи, обладающие и метрической определённостью. Включение этих задач в данный параграф вызвано желанием автора расширить тематику задач.

При решении задач методом „внутреннего“ проектирования (см. введение) приходится пользоваться как параллельным (в случае призм), так и центральным (в случае пирамид) внутренним проектированием. Следует указать, что метод решения задач на пересечение прямой с плоскостью состоит в следующем: через прямую проводят вспомогательную плоскость (лучше проектирующую) и строят линию её пересечения с данной плоскостью. Тогда точка пересечения построенной прямой с данной и есть искомая.



Черт. 19.

1. Построить точку встречи данной прямой AB с основной плоскостью P. Прямая AB, определяемая точками A и B, должна быть „вполне заданной“ на чертеже, т. е. должны быть даны изображения как самих точек A и B, так и их оснований a и b (черт. 19). Проектирующие прямые Aa и Bb определяют проектирующую плоскость $AaBb$. Так как прямая AB и её проекция ab лежат в этой плоскости, то их точка пересечения M и является искомой ($M = AB \times ab$). Точку M называют следом прямой AB на основной плоскости; прямая aM — след проектирующей плоскости.

Найти решение задачи для случая, когда точки *A* и *B* расположены по разные стороны плоскости *P*.

2. Точки *A* и *B* расположены на смежных боковых гранях призмы[1]. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью нижнего основания призмы.

3. Точки *A* и *B* расположены на несмежных боковых гранях призмы. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью нижнего основания призмы.

4. Точка *A* лежит на боковом ребре призмы, а точка *B* — на не пересекающей его стороне верхнего основания. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью нижнего основания призмы.

Проектируем точку *B* параллельно боковому ребру призмы, после чего задача сводится к задаче 1 настоящего параграфа.

5. Точка *A* расположена на боковом ребре призмы, а точка *B* — на не пересекающей его стороне нижнего основания призмы. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью верхнего основания призмы.

Задача по существу совпадает с предыдущей. Она, как и некоторые другие в дальнейшем, имеет целью приучить проектировать точку на любую плоскость.

6. Точки *A* и *B* расположены на боковых гранях призмы. Построить точки встречи прямой *AB* с плоскостями оснований призмы.

7. Точка *A* расположена на боковом ребре треугольной призмы, а точка *B* — на противолежащей грани. Построить точки встречи прямой *AB* с плоскостями оснований призмы.

8. Точка *A* расположена на боковом ребре призмы, а точка *B* — на верхнем основании призмы. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью нижнего основания призмы.

Проектируем точку *B* параллельно боковому ребру призмы, причём учитываем, что расстояние от точки *B* до её проекции равно боковому ребру призмы.

9. Точка *A* расположена на боковой грани призмы, а точка *B* — на нижнем основании. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью верхнего основания призмы.

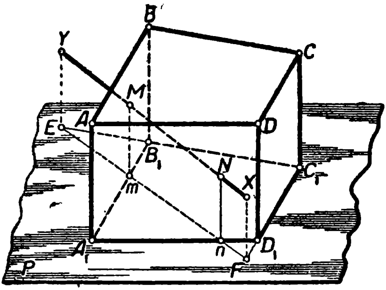
10. Точка *A* расположена на боковой грани призмы, а точка *B* — на нижнем основании. Построить точку встречи прямой *AB* с плоскостью одной из тех боковых граней призмы, в которых не лежит точка *A*.

---

[1] Здесь и в дальнейшем призма берётся произвольная. Если по условию задачи речь идёт о правильной или прямой призме, то это оговаривается.

11. Точки M и N расположены на смежных боковых гранях четырёхугольной призмы. Построить точки встречи прямой MN с плоскостями двух других боковых граней призмы (черт. 20).

Выберем нижнее основание призмы за основную плоскость, а рёбра призмы — в качестве проектирующих. Тогда легко строятся основания m и n точек M и N. Строим далее $mn \times C_1D_1 = F$ и $mn \times B_1C_1 = E$. Из точек E и F проводим прямые, параллельные боковому ребру призмы. Пересечения этих прямых с прямой MN дадут искомые точки X и Y. Справедливость этого утверждения вытекает из того, что прямая EY лежит в плоскости BCC_1B_1, а прямая FX — в плоскости DCC_1D_1.



Черт. 20.

12. Точки M и N расположены на противоположных боковых гранях четырёхугольной призмы. Построить точки встречи прямой MN с плоскостями двух других боковых граней.

13. Дан треугольник ABC, не лежащий в основной плоскости P. Построить точки встречи его медиан с плоскостью P.

14. Изобразить параллелограм, не лежащий в основной плоскости, три вершины которого заданы на чертеже.

При решении следует использовать свойство диагоналей параллелограма.

15. Построить точку пересечения с основной плоскостью P диагонали BD параллелограма $ABCD$, не лежащего в основной плоскости, если на чертеже заданы его вершины A, B и C.

16. Изобразить правильный шестиугольник $ABCDEF$, не лежащий в основной плоскости, три последовательные вершины которого A, B и C заданы на чертеже.

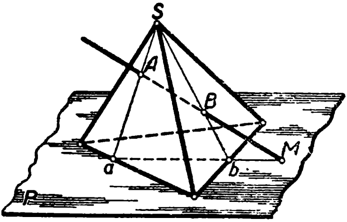
Как изменится решение задачи, если будут заданы вершины A, B и D? вершины A, C и E?

17. Точки A и B расположены на несмежных боковых рёбрах четырёхугольной пирамиды. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью основания пирамиды.

Воспользоваться „внутренним“ центральным проектированием, считая вершину пирамиды S центром проекций.

18. Точки A и B расположены на боковых гранях пирамиды. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью основания пирамиды.

Построение показано на чертеже 21. Оно сводится к проведению проектирующей плоскости SAB и построению её следа ab на основной плоскости. Тогда точка $M = AB \times ab$ и есть искомая.



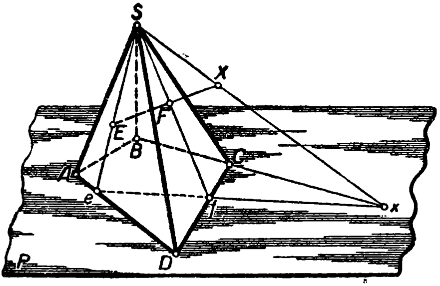
Черт. 21.

19. Точка A расположена на боковом ребре пирамиды, а точка B — на её боковой грани, не содержащей этого ребра. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью основания пирамиды.

20. Точки A и B лежат на боковых гранях треугольной пирамиды. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью третьей боковой грани пирамиды.

Задача подобна задаче 18 § 2. Центром проектирования окажется вершина пирамиды, противоположная третьей боковой грани.

21. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ и точки E и F на её боковых гранях SAB и SDC. Найти точку встречи прямой EF с плоскостью грани SBC (черт. 22). Выбрав в качестве центра внутреннего проектирования точку S, а в качестве основной плоскости — основание $ABCD$ пирамиды и, проведя проектирующую плоскость Sef, мы легко найдём прямую $Sx =$ пл.$Sef \times$ $\times$ пл.SBC. Теперь строится и искомая точка $X = EF \times Sx$.



Черт. 22.

22. Дана пятиугольная пирамида $SABCDE$. Точки M и N лежат на гранях SAE и SED. Найти точку встречи прямой MN с плоскостью грани SBC.

23. Точки M и N лежат на противоположных боковых гранях четырёхугольной пирамиды. Найти точки встречи прямой MN с плоскостью двух других боковых граней пирамиды.

24. Дана пятиугольная пирамида $SABCDE$ и точки M и N на гранях SBC и SAE. Построить точку встречи прямой MN с плоскостью грани SAB пирамиды.

25. Точка A лежит на боковом ребре, а точка B — на пересечении диагоналей параллелепипеда. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью нижнего основания параллелепипеда.

26. Дана правильная треугольная пирамида. Точка A расположена на боковом ребре, а точка B — на высоте пирамиды. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью основания пирамиды.

27. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$ (высота её Ss задана на чертеже). Точка K расположена на высоте пирамиды, а точка P — на боковой грани пирамиды. Построить точку встречи прямой KP с плоскостью основания пирамиды и с плоскостью одной из боковых граней пирамиды, на которых не лежит точка P.

Пусть центральная проекция точки P — p. Тогда первая из искомых точек находится как раз на пересечении ps с KP. Для нахождения второй точки строим точку пересечения прямой ps со стороной основания пирамиды, лежащей в заданной грани. Если эта точка H, то находим $KP \times SH = X$.

28. Дана правильная шестиугольная пирамида. Точка A расположена на высоте пирамиды, а точка B — в плоскости основания пирамиды вне пирамиды. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью пирамиды.

29. Дана правильная пятиугольная пирамида. Точка A расположена на высоте пирамиды, а точка B — на основании пирамиды. Построить точку встречи прямой AB с боковой поверхностью пирамиды, а также с плоскостью заданной боковой грани пирамиды.

30. Дана призма: точка A расположена на боковом ребре призмы, а точка B — в плоскости нижнего основания призмы вне призмы. Построить точку встречи прямой AB с поверхностью призмы.

Особо следует рассмотреть случай, когда искомая точка окажется на верхнем основании призмы.

31. Построить точку встречи прямой AB с поверхностью призмы, если точка A расположена в плоскости нижнего основания призмы вне призмы, а точка B:

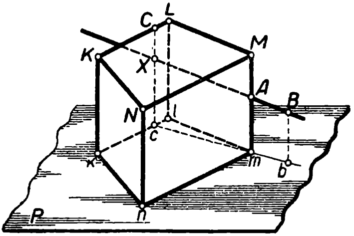
а) на стороне верхнего основания;

б) на боковой грани призмы.

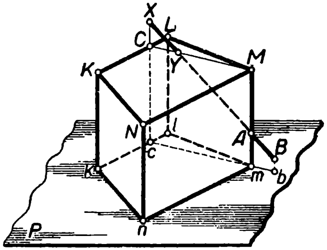
Учесть замечание к задаче 30 настоящего параграфа.

32. Дана призма и точка *B* (*b*) вне её[1]. Построить точку встречи прямой *AB* с поверхностью призмы, если точка *A* расположена на боковом ребре призмы (черт. 23а).

Пусть точка *A* расположена на ребре *Mm*. Проведём через *Am* и *Bb* проектирующую плоскость; она пересечёт грань *KklL* по прямой *cC*. Тогда точка $X = AB \times Cc$ и будет искомой.



Черт. 23а.



Черт. 23б.

Однако может случиться, что точка пересечения прямых *AB* и *Cc* будет лежать вне поверхности призмы (черт. 23 б). Это означает, что прямая *AB* пересекает верхнее основание призмы. Искомая точка определится в пересечении прямых *AB* и *CM*.

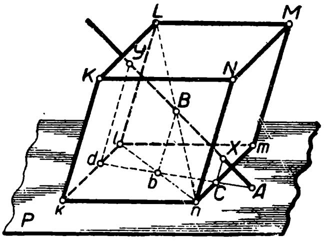
33. Найти точки встречи прямой *AB* с поверхностью призмы, если точка *A*(*a*) расположена вне призмы, а точка *B* лежит:

а) на боковой грани призмы;

б) на верхнем основании призмы;

в) внутри призмы (в этом случае для точки *B* задано и её основание *b*).

34. Точка *A* расположена в плоскости основания параллелепипеда, вне его, а точка *B* — на одной из его диагоналей. Построить точки встречи прямой *AB* с поверхностью параллелепипеда.



Черт. 24.

Основанием точки *B* будет являться точка $b = ln \times Bb$ (черт. 24). Проведём через прямую *AB* проектирующую плоскость; она пересечёт грани *KklL* и *NnmM* соответственно

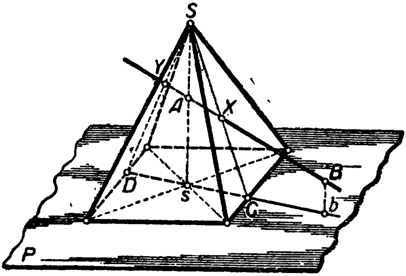
---

[1] Обозначение *B* (*b*) показывает, что на чертеже заданы изображения точки *B* и её основания *b*.

по прямым CX и dY. Тогда в пересечении этих прямых с прямой AB и найдутся искомые точки X и Y.

Как и в задаче 32, одна из точек может оказаться на верхнем основании параллелепипеда.

35. По условию предыдущей задачи найти точки встречи прямой AB с плоскостями двух других боковых граней параллелепипеда.



Черт. 25.

36. Точки $A(a)$ и $B(b)$ расположены внутри призмы. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью призмы.

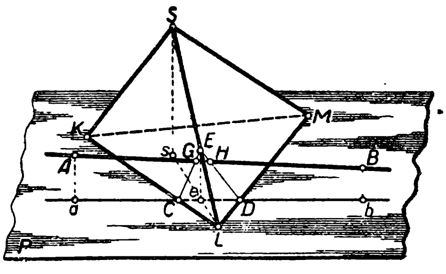
37. Точки $A(a)$ и $B(b)$ расположены вне призмы. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью призмы.

Искомых точек может быть 0, 1, 2, или бесчисленное множество. Показать, как может получиться такое число решений.

38. Дана правильная четырёхугольная пирамида. Точка A расположена на высоте пирамиды, а точка $B(b)$ — вне пирамиды. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью пирамиды.

Здесь направление внутреннего проектирования параллельно высоте пирамиды. Проектирующуюся плоскость $SsBb$ пересекают стороны основания пирамиды (черт. 25) в точках C и D. Пересечение AB с прямыми SC и SD даёт обе искомые точки.

39. Дана пирамида $SKLM$ (высота Ss) и точки $A(a)$ и $B(b)$ вне её. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью пирамиды (черт. 26).



Черт. 26.

Проводим проектирующую плоскость $AabB$; она пересечёт пирамиду по линии CED. (Точка E лежит на линии пересечения Ee проектирующих плоскостей $AabB$ и SsL.) Теперь искомые точки G и H определяются как точки пересечения прямой AB с линией сечения CED.

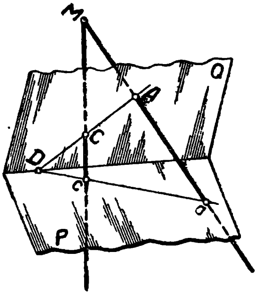
Однако возможно решение и при помощи внутреннего центрального проектирования. Примем вершину пирамиды S за центр проектирования. Тогда основаниями точек A и B будут точки a' и b' встречи прямых SA и SB с плоскостью основания пирамиды. Соединим полученные точки a' и b' прямой. Она пересечёт основание пирамиды в точках C' и D'. Пересечение прямой AB с прямыми SC' и SD' (почему они пересекаются?) даст искомые точки.

40. Дана правильная шестиугольная пирамида. Точка $A(a)$ расположена внутри, а точка $B(b)$ — вне пирамиды. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью пирамиды.

Принять за направление внутреннего проектирования высоту пирамиды.

41. Из точки M проведены две прямые. Одна из них пересекает грани двугранного угла в точках A и a, а вторая — в точке C и ещё одной, которую требуется построить (черт. 27).

Если принять грань P за основную плоскость, а точку M за центр внутреннего проектирования, то грань Q окажется заданной на чертеже своим следом на плоскости P и точкой $A(a)$. Тогда точка C, принадлежа заданной плоскости, и будет заданной на чертеже, и, следовательно, её основание C возможно построить.



Черт. 27.

Действительно, проведя проектирующую плоскость через точки M, A и C, мы легко определим её след aD на плоскость P, а тогда $c = MC \times aD$.

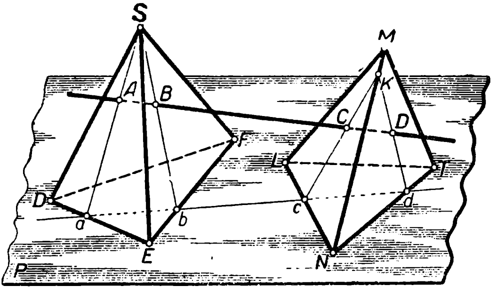
Как изменится построение, если AC параллельна ребру двугранного угла?

42. Две параллельные прямые пересекают грани двугранного угла: одна в точках A и B, вторая в точке C и ещё одной, которую требуется построить.

43. Основания двух пирамид лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность одной пирамиды в точках A и B, а второй — в точке C и ещё одной, которую требуется построить (черт. 28).

Примем вершину S за центр внутреннего проектирования и проведём проектирующую плоскость SAB. Эта плоскость пересечёт вторую пирамиду по линии, одна точка которой (C)

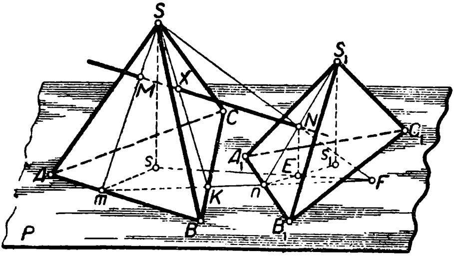
известна. Легко строятся точки $c = ab \times LN$ и $d = ab \times NT$ этой линии. Тогда определится и линия cKd пересечения плоскости SAB со второй пирамидой, после чего $AB \times Kd = D$, где D — искомая точка.



Черт. 28.

Как изменится решение, если прямая ab не пересекает основания второй пирамиды? Каково оно будет, если прямые Kd и AB пересекаются вне пирамиды?

44. Основания двух призм лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность одной из них в точках A и B, а второй — в точке C и ещё одной, которую требуется построить.



Черт. 29.

Решение аналогично решению предыдущей задачи. Призмы могут быть произвольными, параллельность боковых рёбер первой призмы боковым рёбрам второй призмы не требуется, но тогда следует принять за направление внутреннего проектирования направление боковых рёбер первой призмы.

45. Даны изображения пирамид с их высотами, основания пирамид лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность одной пирамиды в точке M, а второй — в точке N. Найти другие точки встречи этой прямой с поверхностями данных пирамид (черт. 29).

Ищем проекцию точки N из центра S. Для этого сначала проектируем N из центра S_1, проводим $NE \parallel S_1 s_1$ до пересечення с ns_1. Затем находим $SN \times sE = F$. Прямая mF пересекает основание пирамиды $SABC$ в точках m и K. Пересечение SK с MN даст искомую точку X,

Таким же путём можно найти точку встречи прямой MN с поверхностью второй пирамиды.

46. Даны правильная пирамида и прямая призма, основания которых лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность пирамиды в точке A, а поверхность призмы — в точке B. Построить другие точки встречи этой прямой с поверхностями данных многогранников.

47. Точки A и B расположены на несмежных боковых гранях четырёхугольной призмы. Построить точки встречи прямой AB с плоскостями диагональных сечений.

48. Точки A и B расположены на противоположных боковых гранях четырёхугольной призмы. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью диагонального сечения призмы.

49. Точки M и N расположены на рёбрах AD и bc параллелепипеда $ABCDabcd$. Построить точку встречи прямой MN с плоскостью, проведённой через рёбра BC и ad.

50. Точки A и B расположены на боковых рёбрах прямой призмы, не принадлежащих к одной грани. Найти в плоскости нижнего основания призмы точку, сумма расстояний которой от точек A и B минимальна.

Задача решается аналогично подобной планиметрической задаче.

51. Точки A и B находятся по одну сторону плоскости P, на которую они спроектированы ортогонально. Построить путь луча, который, пройдя через точку A и отразившись от плоскости P, проходит через точку B.

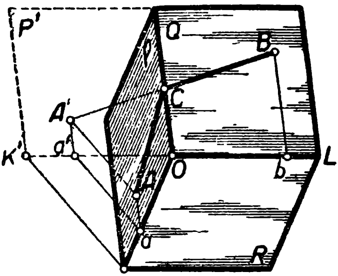
52. Точки A и B, расположенные по разные стороны плоскости P, спроектированы на неё ортогонально. Найти на плоскости P точку, разность расстояний которой от точек A и B наибольшая.

Строим точку C, симметричную точке B относительно плоскости P. Точка встречи прямой AC с плоскостью P будет искомой (почему?).

53. Построить кратчайший путь паука по стенам: от точки A на одной стене комнаты до точки B на смежной стене. Известно, что комната имеет квадратный пол.

Представим себе, что полуплоскость P (на которой дана точка A) повёрнута около ребра двугранного угла до тех пор, пока она не стала продолжением полуплоскости Q (черт. 30). Тогда точка A займёт положение A'. Для построения точки A'

откладываем $OK'=OL$, затем проводим $aa' \parallel KK'$, $AA' \parallel KK'$ и $a'A' \parallel aA$, тогда $A'=AA' \times a'A'$. Искомая линия станет прямой $A'CB$ и тем самым определится точка C, после чего легко построить кратчайший путь паука ACB.



Черт. 30.

Несложный расчёт показывает, что

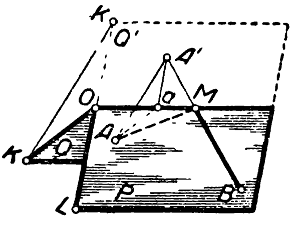
$$CO=\frac{Aa\cdot bO+Bb\cdot aO}{aO+bO}.$$

54. Точки A и B расположены на разных скатах крыши (черт. 31). Как расположится на крыше нить, соединяющая кратчайшим путём эти точки?

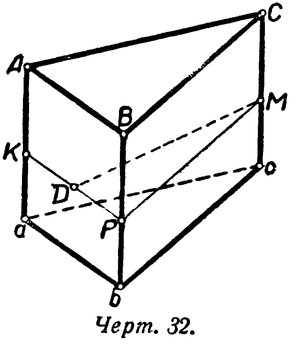
Построение аналогично построению в предыдущей задаче. Искомое положение нити — AMB.

55. Дана правильная треугольная призма. Из точки M на боковом ребре её опустить перпендикуляр на противоположную боковую грань её.

Искомый перпендикуляр должен быть медианой треугольника, который получится в сечении призмы плоскостью, проведённой через точку M параллельно плоскости основания. Проводим $MP \parallel BC$, $PK \parallel AB$. Делим KP пополам и полученную точку D соединяем с точкой M. MD — искомый перпендикуляр (доказать) (черт. 32).



Черт. 31.



Черт. 32.

Можно было провести медиану основания и отыскать точку D как пересечение прямой, проведённой из M параллельно медиане основания и прямой, проведённой из конца медианы параллельно боковому ребру призмы.

56. Дана правильная треугольная призма. Из точки на боковой грани призмы опустить перпендикуляры на другие боковые грани.

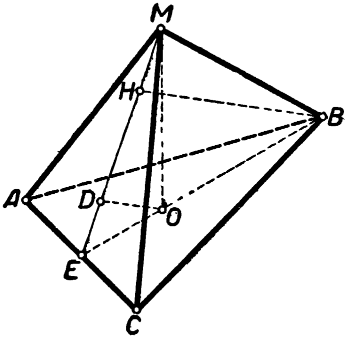
57. Дана правильная четырёхугольная призма. Из точки на боковой грани призмы опустить перпендикуляры на плоскости диагональных сечений призмы.

58. Дана правильная пятиугольная призма. Из точки A, лежащей на боковой грани призмы, опустить перпендикуляры на неприлежащие грани призмы.

Учесть, что прямая, соединяющая вершину правильного пятиугольника с серединой противолежащей стороны, перпендикулярна этой стороне.

59. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Из точки K на грани SAB опустить перпендикуляр на плоскость, делящую пополам двугранный угол между гранями SAB и SAC.

60. Дана правильная пятиугольная призма. Из точки A, лежащей на боковой грани призмы, опустить перпендикуляры на диагональные сечения призмы.



Черт. 33.

61. Дана правильная четырёхугольная призма. Из точки M, взятой на одной из диагоналей призмы, опустить перпендикуляры на боковые грани данной призмы.

62. Высота правильной треугольной пирамиды вдвое меньше стороны основания. Опустить перпендикуляр из вершины основания на противолежащую боковую грань (черт. 33).

Пусть $AC=2a$, тогда $MO=a$, $BE=a\sqrt{3}$, $EO=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, если в натуре $OD\perp ME$, то $ED:DM=$ $=EO^2:MO^2=1:3$.

Но

$$HE:DE=BE:EO.$$

Отсюда следует, что

$$HE=\frac{3}{4}ME.$$

Значит, проводим апофему ME грани AMC, откладываем на ней $MH=\frac{1}{4}ME$. Прямая BH — искомая.

Подобного рода расчёты (если они возможны) нередко облегчают построение.

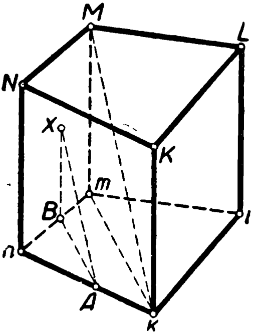
63. Высота правильной треугольной пирамиды равна стороне основания пирамиды. Из точки на боковом ребре пирамиды опустить перпендикуляр на противолежащую боковую грань.

64. Опустить из точки A перпендикуляр на боковую грань SKL правильного тетраэдра $SKLM$, если точка A находится

а) на ребре SM;

б) на грани SKM;

в) внутри тетраэдра и задана на чертеже изображениями самой точки A и её основания a, полученного проектированием из S на плоскость KLM.



Черт. 34.

65. Через точку A, лежащую на стороне основания четырёхугольной призмы, провести прямую, параллельную одной из диагоналей призмы, и найти точку встречи этой прямой с поверхностью призмы (черт. 34).

Проводим через точку A проектирующую плоскость ABX, параллельную диагональной плоскости Mmk. Она будет иметь своими следами на гранях $mnkl$ и $MNnm$ соответственно прямые $AB \,||\, mk$ и $BX \,||\, Mm$. Если теперь провести в этой плоскости прямую $AX \,||\, Mk$, то мы сразу найдём искомую точку $X = AX \times BX$.

66. Через точку A провести прямую, параллельную одной из диагоналей четырёхугольной призмы, и найти точку встречи этой прямой с поверхностью призмы, если точка A лежит

а) на боковом ребре призмы;

б) на боковой грани призмы;

в) на одном из оснований призмы;

г) в плоскости нижнего основания призмы вне призмы;

д) внутри призмы и задана на чертеже изображением самой точки A и её основания a.

67. Дана призма и прямая AB. Через точку M провести прямую, параллельную AB, и найти точки встречи этой прямой с поверхностью призмы, если точка M лежит

а) на верхнем основании призмы;

б) в плоскости нижнего основания призмы вне призмы;

в) внутри призмы (дано изображение точки M и её основания m);

г) вне призмы (дано изображение точки M и её основания m);

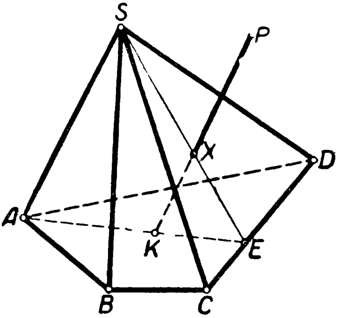
д) на боковом ребре призмы;

е) на боковой грани призмы.

Должно быть дано изображение прямой AB и её внутренней проекции ab на плоскость нижнего основания призмы.

68. Дана пирамида $SABCD$ и точка K на основании пирамиды. Провести через точку K прямую, параллельную SA — боковому ребру пирамиды, и найти точку встречи этой прямой с поверхностью пирамиды.

Проводим через прямую SA и точку K проектирующую плоскость SAK (черт. 35) и в этой плоскости проводим через точку K прямую $KP \parallel SA$. Прямая KP пересечёт SCD—грань пирамиды — в точке $X = KP \times SE$, причём SE есть прямая пересечения плоскости SAK и SCD.



Черт. 35.

69. Дана правильная четырёхугольная пирамида. Через точку A провести прямую, параллельную апофеме одной из боковых граней, и найти точку встречи её с поверхностью пирамиды, если точка A лежит

а) на высоте пирамиды;

б) на основании пирамиды;

в) внутри пирамиды (дано изображение точки A и её основания a);

г) на боковой грани, не смежной с той, на которой задана апофема.

70. Дана правильная треугольная пирамида и прямая AB вне её. Провести через точку M прямую, параллельную AB, и найти точки встречи её с поверхностью пирамиды, если точка M лежит

а) на высоте пирамиды;

б) на основании пирамиды;

в) внутри пирамиды (дано изображение точки M и её основания m);

г) в центре тяжести боковой грани.

71. Дана правильная шестиугольная пирамида и точка $A\,(a)$ вне её. Построить прямую, проходящую через точку A и параллельную данной прямой *BC* (*bc*), и отыскать точки встречи этой прямой с поверхностью пирамиды.

72. Плоскость задана точками *A*(*a*), *B*(*b*) и *C*(*c*). Построить след этой плоскости на основной плоскости.

Искомая прямая определится двумя точками встречи прямых *AB* и *AC* (или *AB* и *BC*, или *AC* и *BC*) с основной плоскостью. Выбор пары прямых делается с таким расчётом, чтобы точки встречи получились возможно ближе к основаниям точек.

Может ли задача не иметь решения?

Как изменится построение, если точки расположены по разные стороны основной плоскости?

73. Точки *A*, *B* и *C* расположены на трёх боковых рёбрах призмы. Построить след плоскости *ABC*. Рассмотреть случай, когда хотя бы одно из указанных рёбер не смежно двум другим.

Здесь и в дальнейшем, если нет специальных указаний, след плоскости отыскивается на плоскости основания данного многогранника.

74. Точки *A*, *B* и *C* расположены на трёх боковых рёбрах пирамиды. Построить след плоскости *ABC*. Рассмотреть случай, когда хотя бы одно из указанных рёбер не смежно двум другим.

75. Построить след плоскости *ABC*, зная, что

а) точки *A* и *B* расположены на боковых рёбрах призмы, а точка *C* — на боковой грани, не содержащей этих рёбер;

б) точки *A* и *B* расположены на боковых гранях призмы, а точка *C* — на боковом ребре, не лежащем в этих гранях;

в) точки *A*, *B* и *C* расположены по одной на трёх гранях призмы;

г) точки *A* и *B* расположены на боковых гранях призмы, а точка *C* — в плоскости нижнего основания призмы вне призмы.

76. Построить след плоскости *ABC*, зная, что

а) точки *A* и *B* расположены на боковых гранях пирамиды, а точка *C* — на боковом ребре, не лежащем в этих гранях;

б) точка *A* расположена на боковой грани пирамиды, а точки *B* и *C* — на боковых рёбрах, не принадлежащих этой грани;

в) точки *A*, *B* и *C* расположены по одной на трёх боковых гранях пирамиды;

г) точки *A* и *B* суть центры тяжести двух боковых граней пирамиды, а точка *C* лежит в плоскости основания пирамиды вне пирамиды;

д) точки *A* и *B* расположены на боковых гранях пирамиды, а точка *C* — на стороне основания пирамиды.

Особый интерес представляет случай г). Легко убедиться, что прямая *AB* параллельна плоскости основания пирамиды. Значит, искомым следом будет прямая, проведённая через точку *C* параллельно *AB*.

77. Дана правильная треугольная пирамида. Точка *A* расположена на высоте пирамиды, а точки *B* и *C* — на боковых гранях пирамиды. Построить след плоскости *ABC*.

78. Дана правильная пятиугольная пирамида. Построить след плоскости, заданной тремя точками, из которых одна лежит на высоте пирамиды, вторая — на боковой грани, а третья — на боковом ребре, не принадлежащем этой грани.

79. Построить след плоскости, заданной двумя точками на высоте правильной четырёхугольной пирамиды и точкой на боковой грани этой пирамиды.

80. Построить след плоскости *ABC*, зная, что

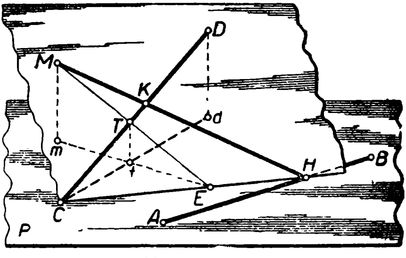
а) точки *A* и *B* расположены на боковых рёбрах призмы, не принадлежащих одной грани, а точка *C* — на верхнем основании призмы;

б) точка *A* расположена на боковой грани призмы, а точки *B* и *C* — на верхнем основании призмы;

в) точка *A* расположена на боковом ребре призмы, а точки *B* и *C* — на основаниях призмы.

81. Построить след плоскости, заданной тремя точками на попарно скрещивающихся рёбрах параллелепипеда.

82. Построить след плоскости *ABC*, заданной точкой на боковой грани призмы и какой-либо прямой на другой боковой грани.



Черт. 36.

83. (Устно.) Найти след плоскости, заданной тремя точками, из которых две лежат на одной диагонали параллелепипеда, а третья — на другой диагонали его.

84. Построить след плоскости заданной точкой на боковой грани пирамиды и какой-либо прямой на другой боковой грани.

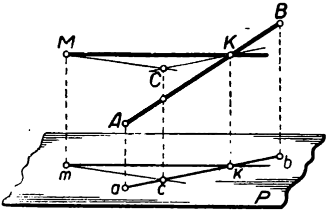
85. Дана плоскость *P*. Прямая *AB* лежит в этой плоскости, а прямая *CD*(*d*) пересекает эту плоскость в точке *C*. Через точку *Mm* провести прямую, пересекающую прямые *AB* и *CD* (черт. 36).

Проводим через точку M и прямую CD плоскость MCD. Её след на плоскости P принадлежит точке C. Проведя через точку M какую-либо прямую MT, пересекающую прямую CD, и построив след этой прямой, мы получим вторую точку следа плоскости MCD. Прямая AB пересекает CE в точке H, поэтому соединив точку M с точкой H, мы и получим искомую прямую MKH, пересекающую CD в точке K.

При некотором расположении прямых AB и CD и точки M может случиться так, что прямая MH будет пересекать прямую CD, но не пересекать AB. Это будет, если $AB \parallel CE$.

86. Через точку M на боковой грани параллелепипеда провести прямую, пересекающую диагональ параллелепипеда и сторону основания параллелепипеда, принадлежащую грани, противоположной той, на которой дана точка M.

87. Через точку M на верхнем основании четырёхугольной призмы провести прямую, пересекающую диагональ призмы и прямую, лежащую в плоскости основания призмы вне призмы.



Черт. 37.

88. Дана плоскость P и три прямые AB, $CD(d)$ и $MK(k)$, из которых AB лежит в плоскости P, а две другие пересекают эту плоскость соответственно в точках C и M. Провести прямую, пересекающую прямые AB и CD и параллельную прямой MK.

89. Через точку $M(m)$ провести прямую, параллельную основной плоскости P и пересекающую прямую $AB(ab)$ (черт. 37).

Проведём через точку M сначала произвольную прямую MC, параллельную плоскости P (её проекция mc на плоскость P должна быть параллельна самой прямой MC). Затем через точку C пересечения прямой MC с проектирующей плоскостью $AaBb$ проводим прямую $CK \parallel$ пл. P (прямая CK должна быть параллельна ab). Соединив точку $K = CK \times AB$ с точкой M, получим искомую прямую MK. В самом деле, прямая MK принадлежит плоскости MCK, определяемой прямыми MC и CK; параллельными плоскости P, и, стало быть, прямая $MK \parallel$ пл. P и, кроме того, она пересекает прямую AB.

Если прямая AB параллельна плоскости P, то условию будет отвечать либо бесконечное множество прямых, либо ни одной.

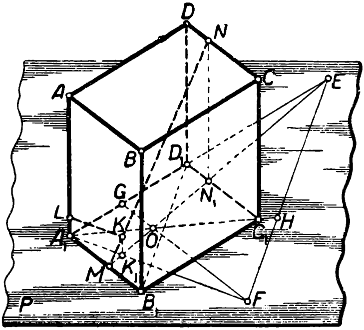
90. Через точку M на боковой грани четырёхугольной призмы провести прямую, параллельную плоскости основания призмы и пересекающую данную диагональ призмы.

91. Через точку M на боковой грани ABB_1A_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ провести прямую, параллельную грани BCC_1B_1 и пересекающую диагональ AC_1 грани ACC_1A_1.

• **92.** Дан куб. Построить общий перпендикуляр его диагонали и бокового ребра, не пересекающего эту диагональ.

Искомый перпендикуляр проходит через середины бокового ребра и диагонали куба (почему?).

93. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и N расположены на рёбрах A_1B_1 и CD. Построить общий перпендикуляр отрезка MN и бокового ребра AA_1 (черт. 38). Строим проекцию MN_1 отрезка MN. Теперь задача сводится к построению перпендикуляра из точки A_1 на прямую MN_1. Для этого воспользуемся положением, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Тогда ищем точку $E = A_1D_1 \times MN_1$. Затем проводим $EH \parallel B_1D_1$, далее через точку $O = A_1C_1 \times MN_1$ проводим прямую $GO \parallel A_1B_1$, получаем точку $F = GO \times EH$ и, наконец, соединяем точки A_1 и F. В оригинале треугольника A_1EF оригинал прямой EK_1 является высотой. Поэтому проведя $K_1K \parallel AA_1$ и $LK \parallel A_1K_1$, мы и получим искомый перпендикуляр LK.



Черт. 38.

94. Точки M и N расположены на скрещивающихся рёбрах AB и A_1D_1 куба. Построить общий перпендикуляр к прямым AA_1 и MN.

95. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ даны точки D и E на сторонах AB и A_1C_1 оснований. Построить отрезок, соединяющий кратчайшим образом ребро AA_1 с отрезком DE.

Учесть задачи 6, 7 из § 1.

96. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF$ $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Построить прямую, перпендикулярную к боковому ребру AA_1 и диагонали BE_1.

§ 3. Сечение многогранника плоскостью

Задачи настоящего параграфа решаются либо при помощи построения следа секущей плоскости на основной плоскости, либо по методу соответствия. Первый метод весьма удобен для обоснования построения, так как опирается на хорошо известное учащимся свойство плоскости: „Если прямая имеет с некоторой плоскостью две общие точки, то она целиком лежит в этой плоскости“. Однако, как уже указывалось во „Введении“, этот метод нельзя рекомендовать, если секущая плоскость мало наклонена к основной плоскости.

Метод соответствия во многих случаях не менее удобен (идею аффинного соответствия учащиеся легко воспринимают). Он выгоден тем, что позволяет сделать основной чертёж более крупным. Его недостаток — обилие вспомогательных линий, которые иногда затрудняют чтение важнейшей части чертежа.

В общем оба метода полноправны, и выбор метода в большинстве случаев зависит от вкуса решающего задачу. В приведенных ниже задачах в тех случаях, когда имеется возможность решить задачу любым из названных методов, желательно не ограничиваться одним вариантом решения.

В задачах настоящего параграфа, если даны какие-либо точки, не связанные с элементами данного многогранника, то для позиционной полноты изображения должны быть даны на чертеже и основания этих точек. В случае призмы основания данных точек должны быть заданы в системе внутреннего проектирования по направлению бокового ребра призмы, а в случае пирамиды — в системе внутреннего центрального проектирования с центром в вершине пирамиды. Если пирамида правильная или хотя и неправильная, но на чертеже указано основание её высоты (вершины), то основания данных точек могут быть заданы в системе внутреннего параллельного проектирования по направлению высоты пирамиды.

1. Построить сечение четырёхугольной призмы плоскостью, заданной следом на плоскости нижнего основания и точкой, расположенной на

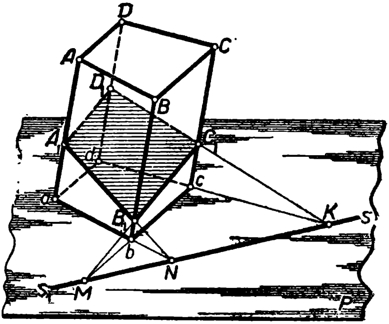
а) боковом ребре призмы;

б) боковой грани призмы;

в) верхнем основании призмы.

Пусть точка, заданная на боковом ребре призмы, — точка A_1 (черт. 39). Тогда нетрудно найти на следе ss_1 секущей плоскости точки $M = ss_1 \times bc$, $N = ss_1 \times ab$ и $K = ss_1 \times dc$. Эти точки лежат соответственно на сторонах B_1C_1, A_1B_1 и

C_1D_1 искомого сечения. Поэтому, проведя прямую A_1N, определим на ребре Bb точку B_1, затем, проведя MB_1, определим на ребре Cc точку C_1, и, наконец, прямая KC_1 определит на ребре Dd точку D_1.



Черт. 39.

Если точка задана на боковой грани, то построение аналогичное.

В случае в), когда точка задана на верхнем основании призмы — точка Q(черт. 40), надо учесть, что сторона сечения RS, лежащая в верхнем основании призмы, должна быть параллельна следу ss_1.

В каждом из этих случаев желательно рассмотреть два положения следа: 1) след не пересекает основания призмы, 2) след пересекает основание.

Это замечание следует учитывать и в дальнейшем.

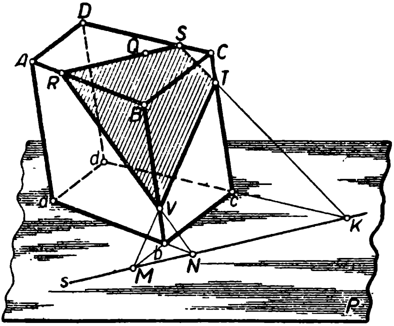
2. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, заданной следом и точкой, расположенной

а) на боковой грани призмы;

б) на верхнем основании призмы;

в) в одной из вершин верхнего основания;

г) на стороне верхнего основания.



Черт. 40.

3. Построить сечение четырёхугольной пирамиды плоскостью, заданной следом и точкой, расположенной

а) на боковом ребре пирамиды;

б) на боковой грани пирамиды;

в) на диагональном сечении пирамиды.

4. Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной следом и точкой, расположенной

а) на боковой грани;

б) на боковом ребре наиболее удалённом от следа грани.

Полезно разобрать случай, когда след плоскости совпадает с одной из сторон основания пирамиды.

5. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, заданной следом и точкой на диагонали параллелепипеда.

6. Построить сечение правильной пирамиды плоскостью, заданной следом и точкой на высоте пирамиды, причём данная пирамида

а) треугольная;

б) четырёхугольная;

в) шестиугольная.

7. Построить сечение треугольной призмы плоскостью, заданной следом ss_1 и точкой $M(m)$, расположенной

а) вне призмы.

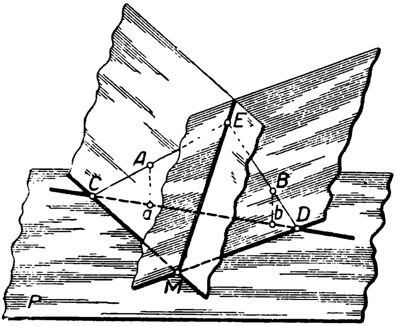
б) внутри призмы.

8. Построить сечение правильной n-угольной пирамиды плоскостью, заданной точкой $M(m)$ внутри пирамиды и следом. Рассмотреть значения $n=3$; 4; 5; 8.

9. Построить сечение пирамиды плоскостью, заданной следом ss_1 и точкой $M(m)$ вне пирамиды.

Если пирамида неправильная, то точка M (m) задана в системе внутреннего центрального проектирования с центром в вершине пирамиды.

10. Каждая из двух данных плоскостей задана следом на основной плоскости и точкой. Построить линию пересечения этих плоскостей.



Черт. 41.

Решение дано на чертеже 41. Строим проектирующую плоскость $AabB$ и обе линии CA и DB её пересечения с данными плоскостями. Прямые CA и DB пересекаются в точке E, а следы плоскостей пересекаются в точке M. Прямая ME — искомая.

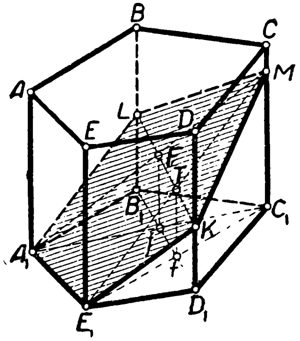
Как изменится решение, если следы плоскостей параллельны между собой? Каково оно будет в том случае, если следы плоскостей параллельны прямой ab?

11. (Устно.) Построить сечение пирамиды плоскостью, заданной прямой, пересекающей основание пирамиды в точках A и B, и проходящей через вершину пирамиды.

12. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и точку на боковом ребре призмы, не лежащей в той грани, которой принадлежит названная сторона основания.

Помимо обычного решения при помощи следа плоскости, возможно и решение по методу соответствия.

Пусть сторона основания есть A_1E_1, а данная точка M (черт. 42). Последовательно строим $B_1D_1 \times A_1C_1 = f$, $B_1D_1 \times E_1C_1 = t$. Через точки f и t проводим прямые, параллельные боковому ребру призмы. Эти прямые пересекаются с прямыми A_1M и E_1M соответственно в точках F и T. Проводим прямую FT; её пересечение с боковыми рёбрами BB_1 и DD_1 даст вершины L и K искомого сечения.



Черт. 42.

13. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону основания призмы и точку M, заданную

а) на боковой грани призмы;

б) на стороне верхнего основания;

в) на верхнем основании;

г) внутри призмы (в этом случае даны изображения точки M и её основания m).

14. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания пирамиды и точку M, расположенную

а) на боковом ребре пирамиды;

б) на боковой грани пирамиды;

в) на диагональном сечении пирамиды;

г) на высоте пирамиды.

15. Дана правильная шестиугольная пирамида. Построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через одну из малых диагоналей основания и центр тяжести пирамиды.

Центр тяжести пирамиды лежит на высоте и удалён от основания пирамиды на $^1/_4$ высоты.

16. Построить линию пересечения плоскостей двух несмежных боковых граней пирамиды.

17. Дана неправильная шестиугольная пирамида. Построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через линии пересечения двух пар несмежных граней.

18. Построить сечение правильной пятиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через

а) диагональ основания пирамиды и середину высоты;

б) апофему боковой грани и точку на второй боковой грани;

в) высоту пирамиды и точку на поверхности пирамиды.

19. Построить сечение призмы плоскостью, заданной

а) тремя точками на трёх смежных боковых рёбрах призмы;

б) тремя точками на трёх боковых рёбрах призмы, из которых хотя бы одно ребро несмежно двум другим;

в) двумя точками на боковых рёбрах призмы и точкой на её боковой грани, не содержащей указанных рёбер;

г) точкой на боковом ребре призмы и двумя точками на её боковых гранях, не содержащих указанного ребра.

д) тремя точками на трёх боковых гранях призмы. Последняя задача решена во „Введении“.

20. Построить сечение призмы плоскостью, заданной тремя точками, из которых

а) одна лежит на верхнем основании призмы, а две — на боковых рёбрах её;

б) одна лежит на верхнем основании призмы, а две — на боковых гранях её;

в) одна лежит на плоскости нижнего основания призмы, а две — на боковых рёбрах призмы;

г) одна лежит в плоскости нижнего основания, а две — на боковых гранях призмы;

д) одна лежит на нижнем основании призмы, одна — на верхнем и одна — на боковой грани призмы.

21. Построить сечение пирамиды плоскостью, заданной тремя точками

а) на трёх боковых рёбрах пирамиды;

б) на трёх боковых гранях пирамиды.

22. Построить сечение пирамиды плоскостью, заданной

а) двумя точками на боковых рёбрах пирамиды и точкой на боковой грани, не содержащей указанных рёбер;

б) двумя точками на боковых гранях пирамиды и точкой на боковом ребре, не лежащем в указанных гранях;

в) точкой на боковом ребре пирамиды, точкой на боковой грани, не содержащей указанного ребра, и точкой в плоскости основания.

23. Построить сечение пирамиды плоскостью, заданной точкой на высоте пирамиды и

а) двумя точками на боковых рёбрах;

б) двумя точками на боковых гранях;

в) точкой на боковой грани и точкой на боковом ребре;

г) точкой на боковом ребре и точкой в плоскости основания;

д) точкой на боковой грани и точкой в плоскости основания;

е) прямой на боковой грани.

24. Построить сечение трёхгранного угла плоскостью, заданной тремя точками на гранях этого угла.

Принимая одну из граней трёхгранного угла за основную плоскость, а за направление внутреннего проектирования — его ребро, не принадлежащее этой грани, нетрудно построить основания данных точек.

Решение возможно и путём построения следа плоскости и при помощи метода соответствия.

25. Пересечь правильную четырёхугольную призму плоскостью так, чтобы сечение имело форму

а) равнобедренного треугольника;

б) трапеции;

в) четырёхугольника, состоящего из двух равнобедренных треугольников с общим основанием.

26. Построить сечение куба плоскостью, заданной тремя точками на трёх попарно скрещивающихся рёбрах его.

27. Пересечь правильный тетраэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился квадрат.

Если дан тетраэдр $SABC$, то искомая плоскость проходит через средние линии каких-либо двух его граней (например, граней SAB и ABC).

Нетрудно показать, что такое сечение имеет форму ромба, а затем, пользуясь теоремой о трёх перпендикулярах, доказать, что две стороны сечения взаимно перпендикулярны.

28. Пересечь куб плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный многоугольник.

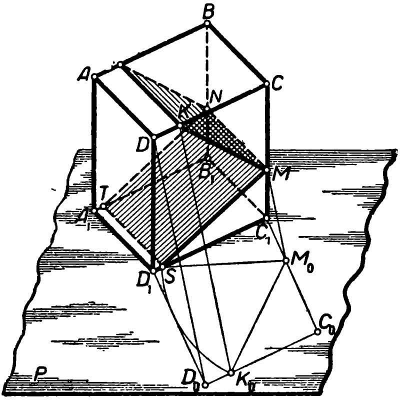
Искомый многоугольник может иметь не больше шести сторон. Правильный шестиугольник получится в том случае, когда плоскость проходит через середины шести рёбер куба. Построение сечения в форме квадрата или равностороннего треугольника не представляет труда. Правильным пятиугольником оно быть не может (доказать!).

29. Через точку M на поверхности куба провести плоскость так, чтобы сечение имело форму равностороннего треугольника.

Искомая плоскость параллельна плоскости, проходящей через концы трёх рёбер куба, исходящих из одной вершины (эта вершина выбирается в той грани, на которой дана точка M, так, чтобы точка M лежала между этой вершиной и не проходящей через эту вершину диагональю грани).

30. Через точку M на боковом ребре куба провести плоскость так, чтобы сечение имело форму квадрата.

Одно решение очевидно. Плоскость проходит через данную точку параллельно грани куба. Другое решение может быть найдено следующим образом. Принимая D_1C_1 (черт. 43) за истинную величину ребра куба, построим квадрат $D_1D_0C_0C_1$. Далее надо установить положение точки M_0, соответствующей точке M. Для этого проводим $MM_0 \parallel DD_0$. Теперь из точки M_0 как из центра засекаем дугу окружности радиуса C_1D_1, тогда получим точки S и K_0. Проведя $K_0K \parallel DD_0$, определим точку K, соответствующую точке K_0 (точка S сама себе соответствует). Теперь уже нетрудно получить ещё два решения данной задачи: $MNTS$ и $MKLN$.



Черт. 43.

31. Пересечь правильный октаэдр плоскостью так, чтобы сечение имело форму правильного шестиугольника.

32. Построить сечение призмы плоскостью, заданной тремя точками, из которых

а) одна лежит внутри призмы, а две — вне призмы;

б) две лежат внутри призмы, а одна — вне призмы;

в) три лежат внутри призмы;

г) три лежат вне призмы;

д) одна лежит внутри призмы, одна — вне призмы и одна — на поверхности призмы.

В последнем случае точку на поверхности призмы нужно взять последовательно на боковом ребре, на боковой грани и на одном из оснований призмы.

Напоминаем, что для точек внутри и вне призмы нужно задать на чертеже их основания.

33. Построить сечение пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, из которых а) одна лежит на высоте пирамиды, а две — внутри пирамиды;

б) одна лежит на высоте пирамиды, а две — вне пирамиды;

в) одна лежит на боковой грани пирамиды, а две — вне пирамиды;

г) одна лежит на боковом ребре пирамиды, а две — вне пирамиды;

д) все три лежат вне пирамиды.

34. Провести сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через две противоположные стороны её оснований.

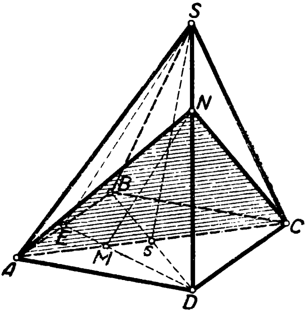
35. (Устно.) Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центры тяжести трёх боковых граней пирамиды.

36. Через диагональ основания пирамиды провести плоскость, параллельную высоте пирамиды[1]).

Рассмотреть четырёхугольную, пятиугольную и шестиугольную пирамиды (основание высоты пирамиды не лежит на заданной диагонали).

37. Через диагональ основания четырёхугольной пирамиды провести плоскость, параллельную боковому ребру пирамиды, не пересекающему эту диагональ.

38. Через диагональ основания пятиугольной пирамиды провести плоскость, параллельную одному из боковых рёбер пирамиды, не пересекающих эту диагональ.



Черт. 44.

39. Через диагональ основания правильной четырёхугольной пирамиды провести плоскость, параллельную апофеме боковой грани.

Пусть искомая плоскость должна пройти через диагональ AC параллельно апофеме SE (черт. 44). Проведём через апофему SE и ребро SD проектирующую плоскость SED и в этой плоскости проведём через точку $M = AC \times ED$ прямую $MN \parallel SE$. Тогда получим точку $N = MN \times SD$, соединяя которую с точками A и C, определим искомое сечение ANC.

40. Построить сечение шестиугольной пирамиды плоскостью, параллельной боковому ребру пирамиды SA и проходящей через

---

[1]) Здесь и дальше имеется в виду построение сечения данного многогранника.

а) диагональ CE;

б) диагональ BE;

в) диагональ BF;

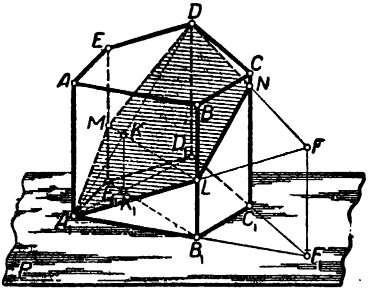
г) середины сторон основания CD и DE;

д) середины сторон основания BC и EF;

е) середины сторон основания AB и AF.

41. Через диагональ основания параллелепипеда провести плоскость, параллельную диагонали параллелепипеда, не пересекающей данную диагональ основания его.

42. Через диагональ основания пятиугольной призмы провести плоскость, параллельную одной из диагоналей призмы, не пересекающих данную диагональ основания призмы.



Черт. 45.

43. Через диагональ A_1D пятиугольной призмы $ABCDE$ $A_1B_1C_1D_1E_1$ провести плоскость, параллельную диагонали B_1E_1 основания, не пересекающей данную диагональ призмы (черт. 45).

Решение проведём по методу соответствия.

Последовательно проводим $B_1E_1 \times A_1D_1 = K_1$; $K_1K \parallel A_1A$; $KK_1 \times A_1D = K$. Через K проводим прямую, параллельную B_1E_1. Она пересекает боковые рёбра BB_1 и EE_1, соответственно в точках L и M. Остаётся определить вершину сечения на ребре CC_1. Для этого строим линию пересечения F_1F боковых граней AA_1B_1B и DD_1C_1C. На этой линии нетрудно найти точку F, принадлежащую искомому сечению, а тогда, соединяя точки D и F_1, определим точку $N = DF \times CC_1$. Пятиугольник A_1MDNL — искомое сечение.

Возможно и решение при помощи следа искомой плоскости. Он проходит через точку A_1 параллельно диагонали основания B_1E_1 (почему?).

44. Через прямую, соединяющую середины двух несмежных боковых рёбер четырёхугольной пирамиды, провести плоскость, параллельную одному из двух других боковых рёбер пирамиды.

45. Через прямую, соединяющую центры тяжести двух боковых граней пирамиды, провести плоскость, параллельную высоте пирамиды.

46. Через диагональ основания пятиугольной призмы провести плоскость, параллельную данной прямой MN (mn).

47. Пересечь куб плоскостью, чтобы площадь сечения была максимально возможной.

Наибольшую площадь, как легко убедиться (алгебраически или тригонометрически), имеет диагональное сечение куба. Поэтому задача имеет 6 различных решений.

48. Через диагональ AC основания пирамиды $SABCD$ (высота SO) провести плоскость, параллельную данной прямой $MN(mn)$.

49. Построить сечение пирамиды $SABCD$ (высота SO) плоскостью, параллельной данной прямой MN (mn) и проходящей через центры тяжести двух боковых граней пирамиды.

50. Построить сечение правильной пятиугольной пирамиды $SABCDE$ плоскостью, параллельной данной прямой MN (mn) и проходящей через

а) диагональ основания AC;

б) одну из осей основания (например, AK, где K — середина стороны CD);

в) середины апофем двух боковых граней;

г) середины рёбер SA и SC;

д) прямую, пересекающую основание пирамиды и одну из её боковых граней в данных точках;

е) прямую, проходящую через вершину основания пирамиды в плоскости основания пирамиды вне его.

51. Через точку на высоте пирамиды провести плоскость, параллельную плоскости основания пирамиды.

52. Через точку на боковой грани призмы провести плоскость, параллельную

а) плоскости основания призмы;

б) данной боковой грани призмы;

в) данному диагональному сечению призмы.

53. Через точку на боковой грани пирамиды провести плоскость, параллельную

а) плоскости основания пирамиды;

б) боковой грани пирамиды;

в) диагональному сечению пирамиды.

54. Через точку на основании пирамиды провести плоскость, параллельную

а) боковой грани пирамиды;

б) диагональному сечению пирамиды, не проходящему через данную точку.

55. Через точку на основании правильной четырёхугольной пирамиды провести плоскость, параллельную высоте и боковому ребру пирамиды.

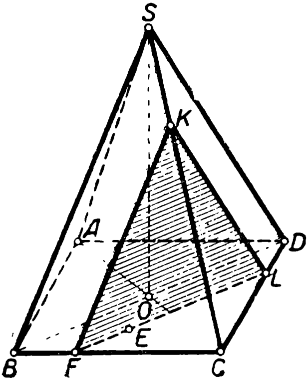
Пусть имеем пирамиду $SABCD$ и точку E на её основании (черт. 46.) Искомое сечение параллельно диагональному сечению SBD пирамиды. Поэтому проведём через точку E параллель к BD (прямая FL) и через точку F параллель к боковому ребру SB (прямая FK). Искомое сечение FKL.

56. Через точку на основании правильной четырёхугольной пирамиды провести плоскость, параллельную апофемам двух её боковых граней:

а) смежных;

б) противоположных.

57. Построить линию пересечения диагонального сечения правильной пятиугольной пирамиды с плоскостью, параллельной её высоте и проходящей через диагональ основания пирамиды, не лежащей в указанном диагональном сечении.



Черт. 46.

58. Построить линию пересечения диагонального сечения правильной пятиугольной призмы с плоскостью, проведённой через сторону нижнего основания призмы, параллельную диагональному сечению, и противоположную вершину верхнего основания.

59. Через прямую, лежащую на боковой грани правильной четырёхугольной призмы, провести плоскость, перпендикулярную диагональной плоскости призмы.

60. Через прямую на боковой грани правильной пятиугольной призмы провести сечение, перпендикулярное плоскости диагонального сечения призмы.

61. Через прямую на боковой грани правильной шестиугольной призмы провести сечение, перпендикулярное плоскости диагонального сечения этой призмы.

Рассмотреть два диагональных сечения (малое и большое).

62. Через прямую на боковой грани правильной четырёхугольной пирамиды провести сечение, перпендикулярное плоскости диагонального сечения этой пирамиды.

63. Через вершину куба провести плоскость, перпендикулярную диагонали куба, не лежащей вместе с данной вершиной в одной диагональной плоскости куба.

Искомая плоскость проходит через концы трёх рёбер, исходящих из одной вершины (этой вершиной является любой конец данной диагонали).

64. Через точку M на боковом ребре AA_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ провести сечение, перпендикулярное диагонали AC_1.

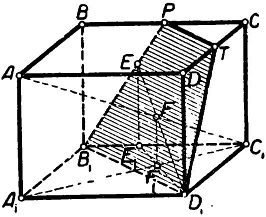
Искомая плоскость параллельна плоскости A_1BD, построенной так же, как в предыдущей задаче.

65. Через точку M на боковой грани куба (или на основании) провести сечение, перпендикулярное диагонали куба.

66. Через точку $M(m)$ внутри куба провести сечение, перпендикулярное диагонали куба.

67. Высота правильной четырёхугольной призмы составляет $^3/_4$ стороны основания её. Через вершину основания D_1 провести сечение плоскостью, перпендикулярной диагонали AC_1.

Диагональ боковой грани призмы составляет $^5/_4$ стороны её основания. Поэтому (черт. 47) перпендикуляр D_1F к диагонали AC_1 делит её в отношении $C_1F_1 : FA = 16 : 25$ (на основании какой теоремы?). Он встречает грань BCC_1B_1 в точке E, которую нетрудно построить. Прямые AC_1 и B_1D_1 ортогональны (почему?). Значит B_1D_1 принадлежит искомому сечению. Проводим $B_1E \times BC = P$ и через точку P параллель к B_1D_1. Искомое сечение — четырёхугольник B_1PTD_1.



Черт. 47.

68. Высота правильной четырёхугольной призмы вдвое больше стороны основания её. Провести через вершину основания плоскость, перпендикулярную диагонали призмы (не проходящей через эту вершину).

69. Через сторону основания правильного тетраэдра провести сечение, перпендикулярное противолежащему боковому ребру тетраэдра.

70. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро вдвое больше стороны основания, провести сечение плоскостью, перпендикулярной противолежащему боковому ребру.

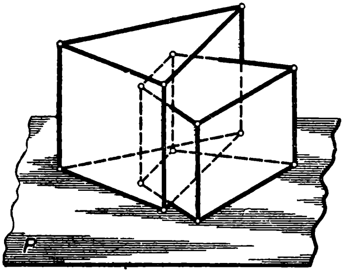
Аналогичная задача разобрана во „Введении".

71. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна боковому ребру. Через сторону основания провести плоскость, перпендикулярную противоположной боковой грани.

72. Две прямые призмы имеют нижние основания на плоскости P, причём эти основания имеют общую часть (черт. 48). Построить линию пересечения поверхностей этих призм.

73. Две равные правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту; основания их лежат в одной плоскости, причём стороны оснований соответственно параллельны. Построить линию пересечения поверхностей этих пирамид.

74. Две равные правильные четырёхугольные пирамиды имеют общую высоту. Основания их лежат в одной плоскости, причём диагонали одного основания соответственно перпендикулярны сторонам второго основания. Построить линию пересечения поверхностей этих пирамид.



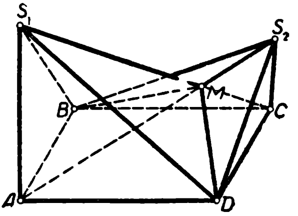
Черт. 48.

75. Четырёхугольная призма и пирамида имеют общее основание. Вершина $S(s)$ пирамиды находится вне призмы. Построить линию пересечения поверхностей этих многогранников.

Вариантом этой задачи является следующая задача: призма и пирамида имеют общее основание и равновелики. Построить линию пересечения поверхностей этих многогранников.

76. Вершины основания правильной четырёхугольной пирамиды лежат на серединах сторон основания куба, а вершина S пирамиды — вне куба. Построить линию пересечения поверхностей этих многогранников.

77. Две пирамиды имеют общее основание — квадрат $ABCD$ — и расположены по одну сторону от плоскости основания. Высоты этих пирамид проектируются соответственно в точки A и C. Построить линию пересечения поверхностей этих пирамид (черт. 49).



Черт. 49.

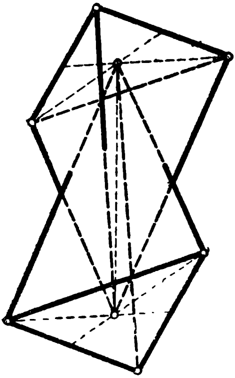
Указание. Так как рёбра пирамид S_1C и S_2A лежат в одной плоскости, то они пересекаются в точке M. Ломаная BMD — искомая.

78. Две пирамиды имеют общее основание — параллелограм $ABCD$. Высоты их имеют основаниями середины сторон AB и CD. Построить линию пересечения поверхностей этих пирамид.

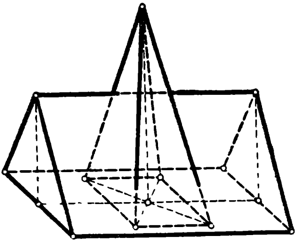
79. Две правильные четырёхугольные пирамиды расположены так, что вершина одной лежит в центре основания второй, соответственные стороны оснований этих пирамид параллельны между собой. Построить линию пересечения поверхностей этих многогранников.

80. Две правильные четырёхугольные пирамиды расположены так, что вершина одной лежит в центре основания второй, стороны основания одной ортогональны диагоналям основания второй. Построить линию пересечения поверхностей этих пирамид.

81. Две равные правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту, их относительное расположение показано на чертеже 50. Построить линию пересечения поверхностей этих многогранников.



Черт. 50.



Черт. 51.

82. Построить линию пересечения поверхностей треугольной призмы и четырёхугольной пирамиды, изображённых на чертеже 51.

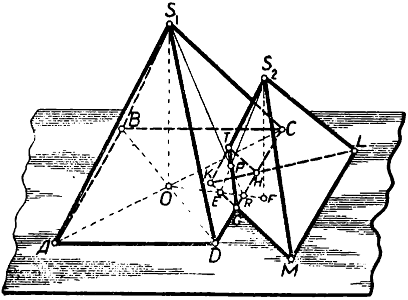
83. Дана прямая треугольная призма и неправильная треугольная пирамида (высота пирамиды должна быть показана на чертеже). Зная, что основания этих многогранников лежат в одной плоскости и пирамида проницает призму, построить линию пересечения поверхностей этих тел.

Задача сводится к отысканию точек встречи боковых рёбер пирамиды с поверхностью призмы, а также боковых рёбер призмы с поверхностью пирамиды. Соединяя пары точек, лежащих в одной грани первого и в одной грани второго многогранника, получим искомую линию. Форма её может быть различной в зависимости от взаимного расположения данных многогранников.

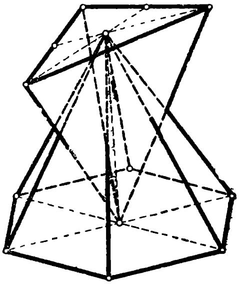
Желательно отдельно рассмотреть случаи: 1) когда искомая линия непрерывна; 2) когда искомая линия состоит из двух замкнутых многоугольников.

84. Даны две пирамиды — правильная четырёхугольная (S_1ABCD) и неправильная треугольная (S_2KLM), высота которой S_2F изображена. Зная, что основания этих пирамид лежат в одной плоскости и имеют общую часть, построить линию пересечения поверхностей этих пирамид (черт. 52). $KM \times DC = G$, $KL \times DC = H$.

Проведя проектирующую плоскость S_1OFS_2, мы легко найдём линию пересечения её с боковыми гранями пирамид. Точка $P = S_1R \times S_2E$ принадлежит поверхностям обеих пирамид. Дальше найдём $T = GP \times S_2K$. Искомая ломаная GTH.



Черт. 52.



Черт. 53.

85. Даны две правильные пирамиды — треугольная и шестиугольная. Вершина каждой из них лежит в центре основания другой, их относительное расположение показано на чертеже 53. Построить линию пересечения поверхностей этих многогранников.

86. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Построить сечение этой пирамиды, имеющее форму параллелограма и проходящее через точку K, расположенную

а) на прямой пересечения диагональных плоскостей пирамиды;

б) на грани ASB.

При построении используются свойства диагоналей параллелограма.

87. Через точки A и B на грани куба провести плоскость, делящую его на две равновеликие части.

Эта задача, как и две следующие, удобна для уяснения центральной симметрии в пространстве. Искомая плоскость проходит через центр куба.

88. Через точки A и B на смежных гранях куба провести плоскость, делящую пополам его поверхность.

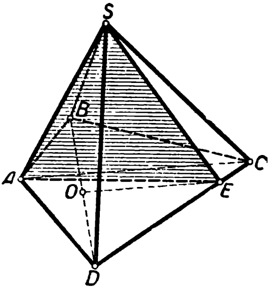
89. Через точки A и B на скрещивающихся рёбрах куба провести плоскость, делящую пополам объём куба.

90. Через точки A и B на рёбрах правильного октаэдра провести плоскость, делящую пополам поверхность октаэдра.

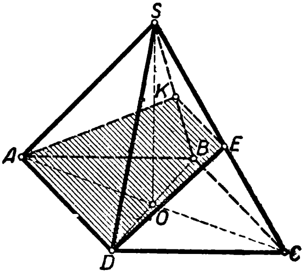
91. Через точки A и B на гранях правильного октаэдра провести плоскость, делящую пополам объём октаэдра.

92. Через вершину C треугольной пирамиды $SABC$ провести плоскость, делящую пополам объём её и параллельную стороне основания AB.

Задача сводится к проведению в грани ASB прямой DE, параллельной AB и делящей площадь треугольника SAB пополам.



Черт. 54.



Черт. 55.

93. Через ребро SA пирамиды $SABCD$ провести плоскость, делящую объём пирамиды пополам.

Пусть O — середина диагонали основания BD (черт. 54). Проведём через точку O прямую, параллельную AC. Эта прямая пересечёт сторону CD в точке E. Легко доказать, что прямая AE делит площадь основания пирамиды пополам. Плоскость SAE — искомая.

94. Дана правильная четырёхугольная пирамида. Через сторону основания её провести плоскость, делящую пополам объём пирамиды.

Пусть искомое сечение $AKED$ (черт. 55) $KE \parallel AD$ (почему?). Обозначим $SE = x, SC = a$. Воспользуемся теоремой: „Объёмы двух тетраэдров, имеющих по равному трёхгранному углу, относятся как произведения рёбер этих трёхгранных углов“. Следовательно, имеем уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}=\frac{1}{2}.$$

Решив это уравнение, построим отрезок SE. Дальнейшее очевидно.

95. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания провести плоскость, делящую пополам боковую поверхность пирамиды.

96. В правильной четырёхугольной пирамиде через сторону основания провести плоскость, делящую пополам боковую поверхность пирамиды.

При составлении уравнения придётся воспользоваться теоремой об отношении площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.

97. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны между собой. Через сторону основания провести плоскость, делящую пополам поверхность пирамиды.

В отличие от двух предыдущих задач здесь речь идёт о полной поверхности пирамиды.

§ 4. Геометрические места

1. Построить геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек.

2. На данной прямой найти точки, равноудалённые от двух данных точек.

Решением задачи может быть одна точка данной прямой или вся данная прямая; может случиться, что не окажется ни одной точки, отвечающей условию задачи. Этим трём случаям соответствуют три возможные положения плоскости симметрии данных точек относительно данной прямой (пересекает прямую, проходит через прямую, параллельна прямой).

Как указывалось в „Введении“, подобного рода исследование должно быть составной частью решения задачи на пространственные геометрические места.

3. На данной плоскости найти точки, равноудалённые от двух данных точек.

4. На поверхности прямой призмы найти точки, равноудалённые от концов одного из её боковых рёбер.

5. На поверхности правильной пятиугольной призмы найти точки, равноудалённые от двух вершин основания.

Рассмотреть два случая: смежные и несмежные вершины.

6. На поверхности пирамиды найти точки, равноудалённые от концов высоты её, заданной на чертеже.

7. На поверхности куба найти точки, равноудалённые от концов диагонали грани его.

8. На поверхности правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* найти точки, равноудалённые от

а) вершин *A* и *B*;

б) вершин *A* и *C*;

в) вершин *A* и *D*;

г) середин сторон *AB* и *BC*;

д) середин сторон *AB* и *CD*;

е) середин сторон *AB* и *DE*.

9. На поверхности правильной пирамиды найти точки, равноудалённые от двух точек *A* и *B* на высоте пирамиды.

10. На поверхности правильной n-угольной пирамиды найти точки, равноудалённые от вершины основания и центра основания.

Рассмотреть для n значения 3, 4, 5, 6 и 8.

11. На поверхности правильной n-угольной пирамиды найти точки, равноудалённые от концов апофемы основания пирамиды.

Рассмотреть для n значения 5 и 6.

12. На поверхности куба найти точки, равноудалённые от концов его диагонали.

13. На поверхности куба найти точки, равноудалённые от двух данных точек на диагонали его.

14. На поверхности правильного тетраэдра найти точки, равноудалённые от

а) концов бокового ребра;

б) двух точек на стороне основания;

в) двух точек на различных сторонах основания.

15. На поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания вдвое меньше бокового ребра, найти точки, равноудалённые от концов бокового ребра.

Построим плоскость, перпендикулярную данному боковому ребру и проходящую через противолежащую ребру сторону основания (как это сделать, выяснено во „Введении“). Затем через середину данного бокового ребра проводим плоскость, параллельную проведенной ранее. Пересечение этой плоскости с поверхностью пирамиды даст все точки, отвечающие условию задачи.

Вместо концов бокового ребра можно задать любые две точки на боковом ребре пирамиды.

16. На поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро вдвое больше стороны основания, найти точки, равноудалённые от двух точек, находящихся на боковых рёбрах пирамиды.

17. На поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны между собой, найти точки, равноудалённые от концов

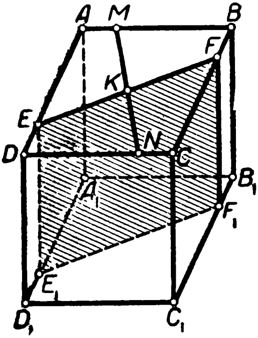
а) стороны основания;

б) бокового ребра.

18. На поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны между собой, найти точки, равноудалённые от двух данных точек на

а) стороне основания;

б) боковом ребре.



Черт. 56.

19. На сторонах AB и CD верхнего основания правильной четырёхугольной призмы взяты точки M и N так, что $AM = NC$. Найти на поверхности призмы точки, равноудалённые от точек M и N (черт. 56).

Делим сторону AD точкой E в отношении $DE:EA = AM:MB$ и соединяем точку E с серединой K отрезка MN, тогда прямая $EF \perp MN$ (доказать!) и, следовательно, EE_1F_1F — искомая линия.

20. Точка E — середина стороны AB основания куба. Найти на поверхности куба точки, равноудалённые от точки E и вершины C того же основания куба.

21. Найти геометрическое место точек, удалённых на a от данной плоскости.

22. (Устно.) Найти геометрическое место вершин пирамид данного объёма, имеющих данное основание.

23. На данной прямой найти точку, удалённую на данное расстояние от данной плоскости.

24. На данной плоскости найти точки, удалённые на данное расстояние от другой данной плоскости.

25. Найти на гранях двугранного угла точки, удалённые на данное расстояние от данной плоскости.

Разобрать случай, при котором данная плоскость параллельна ребру двугранного угла (при этом решением будет группа прямых, параллельных ребру двугранного угла — в группе 0, 1, 2, 3, или 4 прямые — или грань двугранного угла, одна или с прямой на второй грани), и случай непараллельности (решением будут четыре прямые). Очень полезно заставить учащихся проиллюстрировать каждый из этих случаев соответствующим чертежом.

26. Найти на гранях трёхгранного угла точки, удалённые на данное расстояние от данной плоскости.

27. На поверхности куба найти точки, удалённые на $^1/_3$ диагонали грани куба от плоскости диагонального сечения куба.

28. На поверхности правильной шестиугольной призмы найти точки, удалённые на $^1/_2$ стороны основания от

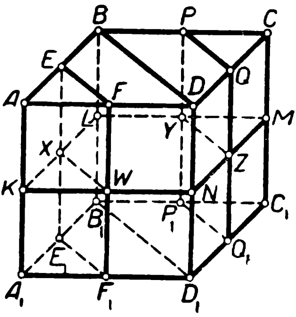
а) меньшего диагонального сечения;
б) боковой грани призмы;
в) большего диагонального сечения.

В первом случае искомое множество точек состоит из бокового ребра и сторон некоторого прямоугольника.

29. Найти точки, равноудалённые от двух данных точек и удалённые на данное расстояние от данной плоскости.

30. На поверхности куба найти точки, равноудалённые от концов бокового ребра и удалённые на $^1/_8$ ребра от боковой грани куба.

31. Найти на поверхности куба точки, равноудалённые от концов бокового ребра его и удалённые на $^1/_4$ диагонали грани от диагонального сечения, не проходящего через указанное боковое ребро.



Черт. 57.

Пусть данное ребро AA_1, а данное диагональное сечение BDD_1B_1 (черт. 57). Если K — середина AA_1, то все точки поверхности куба, равноудалённые от точек A и A_1, находятся на периметре квадрата $KLMN$, лежащего в плоскости, параллельной основанию куба.

Второму условию отвечают точки на сторонах сечений EFF_1E_1 и PQQ_1P_1, проведённых параллельно диагональному сечению BDD_1B_1 и делящих пополам стороны оснований куба.

Пересечение этих фигур определит 4 искомые точки: X, Y, Z и W.

32. Найти на поверхности правильной n-угольной пирамиды точки, равноудалённые от концов высоты пирамиды и равноудалённые от двух точек на стороне основания.

Для n взять значения 4 и 5.

33. Найти на поверхности правильной n-угольной пирамиды точки, равноудалённые от двух данных точек на высоте пирамиды и равноудалённые от двух данных точек на стороне основания пирамиды.

Для *n* взять значения 3 и 6.

34. Внутри правильной пятиугольной пирамиды найти точки, удалённые на $^1/_4$ высоты от основания пирамиды и равноудалённые от концов апофемы основания пирамиды.

35. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух параллельных плоскостей.

36. (Устно.) На поверхности призмы найти точки, равноудалённые от оснований призмы.

37. (Устно.) На поверхности правильной шестиугольной призмы найти точки, равноудалённые от двух параллельных диагональных сечений её.

38. (Устно.) На поверхности параллелепипеда найти точки, равноудалённые от двух противоположных боковых граней его.

39. (Устно.) На поверхности правильной пятиугольной призмы найти точки, равноудалённые от боковой грани призмы и диагонального сечения, параллельного этой грани.

40. (Устно.) На поверхности правильной шестиугольной призмы найти точки, равноудалённые от боковой грани и параллельного этой грани диагонального сечения.

41. Найти геометрическое место середин наклонных, проведённых из данной точки к данной плоскости.

42. Найти геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на данных параллельных плоскостях.

43. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных параллельных плоскостей равна данному отрезку.

44. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных параллельных плоскостей равна данному отрезку.

45. Найти геометрическое место точек, удалённых на a от данной плоскости и на b от второй данной плоскости.

46. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от граней правильного тетраэдра равна высоте его.

Условию задачи отвечает любая точка на поверхности или внутри тетраэдра. Аналогичные задачи можно составить и о других правильных многогранниках.

47. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных плоскостей относятся, как $a:b$ $(a \neq b)$.

48. Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении (внутренне и внешне) наклонные, проведённые из данной точки к данной плоскости.

49. (Устно.) Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную прямую и параллельных другой данной прямой.

50. Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную прямую и перпендикулярных данной плоскости.

Особо рассмотреть случай, когда данная прямая перпендикулярна данной плоскости.

51. (Устно.) Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости.

52. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух параллельных прямых.

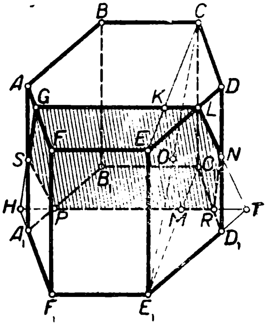
53. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек и равноудалённых от двух параллельных прямых.

54. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных плоскостей и удалённых на a от третьей данной плоскости.

55. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых.

56. На поверхности правильной пятиугольной призмы найти точки, равноудалённые от двух

а) смежных сторон основания; б) несмежных сторон основания.



Черт. 58.

57. Найти на поверхности правильной пятиугольной призмы точки, равноудалённые от двух диагоналей основания.

58. (Устно.) Найти на поверхности куба точки, равноудалённые от диагоналей боковой грани его.

59. Найти на поверхности правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ точки, равноудалённые от

а) сторон AB и BC; б) сторон AB и CD;

в) диагоналей AC и BD; г) диагоналей AC и BE;

д) диагоналей AC и AD; е) стороны AB и диагонали BE;

ж) диагонали AE и стороны AB.

60. Все рёбра правильной шестиугольной призмы равны между собой. Найти на поверхности призмы точки, равноудалённые от двух параллельных сторон оснований призмы, не лежащих в одной грани (BC и F_1E_1).

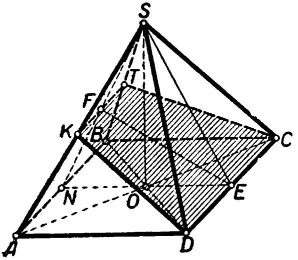
Задача сводится к проведению через середину O отрезка CE_1 плоскости, перпендикулярной этому отрезку (черт. 58). Легко подсчитать, что $CE:CK=3:2$. Следовательно, точку K построить просто. Прямая KO встречает плоскость нижнего основания призмы в точке M. Проводим через точки K и M прямые GL и PR, параллельные BC. Затем при помощи следа плоскости находим точки S и N на боковых рёбрах AA_1 и DD_1 (они делят названные рёбра пополам, поэтому можно было обойтись и без следа плоскости).

61. Найти геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

Воспользоваться тем, что через две скрещивающиеся прямые можно провести две (и только две) плоскости, параллельные между собой. Задачу нетрудно свести к задаче 35 настоящего параграфа.

62. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся плоскостей.

63. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся плоскостей и удалённых на a от третьей данной плоскости.



Черт. 59.

64. Найти на поверхности правильной четырёхугольной пирамиды точки, равноудалённые от диагональных сечений её.

65. Найти на поверхности правильной пятиугольной призмы точки, равноудалённые от двух диагональных сечений призмы, пересекающихся внутри призмы.

66. Найти на поверхности правильной шестиугольной призмы точки, равноудалённые от двух пересекающихся внутри призмы а) больших сечений, б) малых, в) большого и малого.

67. На поверхности правильного тетраэдра найти точки, равноудалённые от двух его граней.

68. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды относится к стороне основания его, как $\sqrt{5}:2$. Найти на поверхности этой пирамиды точки, равноудалённые от плоскости основания и боковой грани (черт. 59).

Если сторону основания данной пирамиды принять за $2a$, то апофема её будет также равна $2a$. Поэтому искомые точки будут принадлежать линии пересечения с поверхностью пирамиды плоскости, проходящей через сторону основания пирамиды (например, CD) и середину F апофемы противоположной грани (SAB). Искомая линия $DKTC$.

69. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ относится к стороне основания её, как $1:\sqrt{2}$. Найти на поверхности этой пирамиды точки, равноудалённые от основания и боковой грани пирамиды.

Нетрудно показать, что одна из искомых точек (M) делит боковое ребро пирамиды (SA) в отношени $1:\sqrt{3}$ (считая от вершины). Тогда геометрическим местом искомых точек будут стороны треугольника MBC.

70. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных пересекающихся плоскостей равна данному отрезку.

Решается на основании планиметрической задачи: „Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от сторон данного угла равна a“.

71. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от граней данного двугранного угла равна данному отрезку.

72. На поверхности правильной шестиугольной призмы найти точки, разность расстояний которых от двух смежных боковых граней призмы

а) равна половине меньшей диагонали основания призмы;

б) равна четверти меньшей диагонали основания.

73. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек равна a^2.

74. Найти на поверхности куба точки, разность квадратов расстояний которых от двух последовательных вершин его равна трети квадрата ребра куба.

75. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух параллельных прямых равна a^2.

76. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных параллельных плоскостей равна a^2.

77. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх точек, не лежащих на одной прямой.

78. (Устно.) Найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх вершин основания

а) правильной призмы; б) правильной пирамиды; в) октаэдра.

79. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх прямых, лежащих в одной плоскости.

Необходимо учесть следующие случаи расположения этих прямых на плоскости: а) прямые попарно пересекаются; б) прямые пересекаются в одной точке; в) две прямые параллельны между собой, а третья пересекает их; г) прямые параллельны между собой.

80. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от граней трёхгранного угла.

81. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от рёбер трёхгранного угла.

82. (Устно.) Найти точки, равноудалённые от граней правильного тетраэдра.

83. (Устно.) Каким геометрическим местом точек можно считать высоту правильной треугольной пирамиды?

84. (Устно.) Найти геометрическое место перпендикуляров, опущенных из данной точки на плоскости, проходящие через данную прямую.

85. (Устно.) Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на плоскости, проходящие через данную прямую.

86. Найти геометрическое место точек, удалённых на a от данной прямой.

87. (Устно.) Найти геометрическое место точек, удалённых от данной прямой больше чем на a, но меньше чем на $3a$.

88. Найти геометрическое место точек, удалённых на a от данной прямой и на b от данной плоскости.

89. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и наклонённых под данным углом к данной плоскости.

90. Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную окружность и параллельных данной прямой.

91. Найти геометрическое место прямых, пересекающих данную прямую в данной точке её и под данным углом.

92. Найти внутри двугранного угла точки, удалённые на данное расстояние от ребра этого угла.

93. (Устно.) Найти геометрическое место точек, удалённых на a от двух рёбер трёхгранного угла.

94. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных параллельных прямых относятся, как $a:b\,(a \neq b)$.

Припомнив определение окружности Аполлония, легко установить, что формой искомого геометрического места будет цилиндрическая поверхность.

95. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от точки M и плоскости P, проходящей через точку M, равно $m:n\,(m > n)$.

Искомым геометрическим местом точек является коническая поверхность с вершиной в точке M, осью её будет перпендикуляр к плоскости P, проведённый через точку M.

96. Найти геометрическое место точек, удалённых на a от данной точки.

97. Найти геометрическое место середин отрезков данной длины a, один конец которых лежит на ребре прямого трёхгранного угла, а второй — на грани, перпендикулярной этому ребру.

Учтя, что медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, найдём искомое геометрическое место в форме восьмой части сферы (октант) радиуса $\frac{a}{2}$.

98. Найти на плоскости P точки, удалённые от точки M более чем на a, но менее чем на b.

Рассмотреть случай, когда расстояние точки M от плоскости P равно a; равно b; лежит между a и b.

99. Найти геометрическое место точек, удалённых от данной точки на a и равноудалённых от двух данных точек. Каким станет решение, если две точки удалены от третьей данной на a?

100. (Устно.) Найти геометрическое место точек, удалённых на a от каждой из данных двух точек.

101. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек равно $a:b\,(a \neq b)$.

102. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

103. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на плоскости, проходящие через другую данную точку B.

104. Найти геометрическое место точек, из которых касательные к данной сфере имеют данную длину.

105. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

106. Найти геометрическое место касательных, проведённых к данной сфере из данной точки.

107. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек равна a^2.

108. Найти геометрическое место точек, удалённых на a от данной точки и на b от данной плоскости.

109. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся данной плоскости в данной точке.

110. Найти геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся данной плоскости.

111. Найти геометрическое место центров шаров, касающихся трёх данных плоскостей.

112. Найти геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся двух данных плоскостей.

113. Найти геометрическое место центров шаров, проходящих через две данные точки.

114. Найти геометрическое место центров шаров данного радиуса, касающихся данной прямой.

115. (Устно.) Найти геометрическое место центров шаров, проходящих через три данные точки.

116. Найти геометрическое место центров шаров, вписанных в данную коническую поверхность.

117. Найти геометрическое место центров шаров данного радиуса, проходящих через данную точку и касающихся данной плоскости.

§ 5. Круглые тела

Многие задачи на цилиндр и конус аналогичны соответствующим задачам о призме и пирамиде. Однако дополнительные трудности возникают в результате необходимости пользоваться лекалом.

Чтобы получить очертания шара в виде окружности, необходимо применять ортогональную проекцию. Для определённости будем считать, что плоскость проекций проходит через центр шара, тогда легко строится высота любой точки поверхности шара. Необходимо учитывать следующее: если на чертеже изображён шар в виде круга, то это значит, что всё изображение должно выполняться в ортогональной проекции, так как нельзя допускать, чтобы одна часть оригинала изображалась в одной проекции, а другая часть того же оригинала — в другой.

1. Дано изображение цилиндра. Построить осевое сечение цилиндра.

2. Даны точки *A* и *B* на поверхности цилиндра. Построить точки встречи прямой *AB* с плоскостями оснований цилиндра.

3. Точка *A* лежит на поверхности цилиндра, а точка *B* (*b*) — внутри него. Построить точки встречи прямой *AB* с поверхностью и плоскостями оснований цилиндра.

4. Точка *A* (*a*) лежит вне цилиндра, а точка *B* — на поверхности его. Построить точки встречи прямой *AB* с поверхностью и плоскостями оснований цилиндра.

5. Построить точки встречи прямой *AB* с поверхностью цилиндра, если точки *A* (*a*) и *B* (*b*) даны

а) внутри цилиндра; б) вне цилиндра;

в) одна внутри цилиндра, а вторая — вне его.

6. Точки *A* и *B* лежат на боковой поверхности цилиндра. Соединить их по поверхности цилиндра кратчайшей линией.

Такая линия называется геодезической. Построив развёртку боковой поверхности, получим эту линию в виде прямой. Найдя высоты нескольких точек, нанесём соответственные точки на основном чертеже. Затем соединим их с помощью лекала.

Однако возможно построение точек и без помощи развёртки, при этом приходится делить дугу пополам и строить высоты соответствующих точек в виде полусуммы высот точек, проектирующихся в концы дуги основания цилиндра.

7. Соединить кратчайшим путём по поверхности цилиндра две противоположные вершины осевого сечения его.

8. Построить сечение цилиндра плоскостью, заданной следом на основной плоскости и точкой на боковой поверхности цилиндра.

9. Построить сечение цилиндра плоскостью, заданной тремя точками на боковой поверхности цилиндра.

Может ли искомое сечение иметь форму прямоугольника?

10. Построить сечение цилиндра плоскостью, заданной следом плоскости и точкой на верхнем основании цилиндра.

11. Построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей через хорду основания цилиндра параллельно данной прямой $MN (mn)$.

12. Основание правильной четырёхугольной пирамиды вписано в основание цилиндра, высота которого составляет $^3/_4$ высоты пирамиды. Построить линию пересечения поверхностей этих тел.

13. Около данного цилиндра описать правильную четырёхугольную пирамиду, высота которой вдвое больше высоты цилиндра.

14. (Устно.) На поверхности цилиндра найти точки, равноудалённые от оснований его.

15. На поверхности цилиндра найти точки, равноудалённые от двух образующих его.

16. (Устно.) Найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх данных образующих цилиндра.

17. На поверхности цилиндра найти точки, равноудалённые от двух осевых сечений его.

18. Около данной правильной n-угольной призмы описать цилиндр. Для n взять значения 3, 4 и 6.

19. Около октаэдра описать цилиндр.

20. Дано изображение конуса. Построить его осевое сечение.

21. Точки A и B лежат на боковой поверхности конуса. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью основания конуса.

22. Точка A лежит на оси конуса, а точка B — в плоскости основания конуса вне конуса. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью данного конуса.

23. Прямая AB, проходящая через точки $A(a)$ и $B(b)$, расположенные вне конуса, пересекает конус. Построить точки встречи прямой AB с поверхностью конуса. (Основания a и b данных точек даны в системе внутреннего параллельного проектирования по направлению высоты конуса.)

Пусть вершина конуса S. Строим точки встречи прямых SA и SB с плоскостью основания конуса.

Проведём через полученные точки a_1 и b_1 прямую (след плоскости SAB), она пересекает основание конуса (след конуса) в точках C и D. Пересечение SC и SD с прямой AB даст искомые точки.

24. Основания двух конусов лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность одного конуса в точке A, а второго — в точке B. Найти две другие точки встречи данной прямой с поверхностью конусов.

Пусть точка A лежит на поверхности конуса, высота которого S_1O. Тогда нетрудно построить основание точки A в системе внутреннего параллельного проектирования по направлению высот данных конусов. Приняв теперь вершину второго конуса S_2 за центр внутреннего проектирования, найдём основания a и b точек A и B в системе этого внутреннего проектирования. Прямая ab (след плоскости S_2AB) пересекает основание второго конуса в точках b и d. Пересечение прямых S_2d и AB даст искомую точку D. Точка C пересечения AB с поверхностью первого конуса строится аналогично.

25. Основания конуса и цилиндра лежат в одной плоскости. Прямая пересекает поверхность цилиндра в точке A и поверхность конуса в точке B. Построить две другие точки встречи этой прямой с поверхностями данных тел.

26. Через хорду основания конуса провести плоскость, параллельную высоте его.

27. Соединить кратчайшим образом по поверхности конуса две точки, принадлежащие этой поверхности.

28. Через диаметр основания конуса провести плоскость, параллельную данной образующей конуса.

29. Дан равносторонний конус. Через конец образующей SA провести плоскость, равноудалённую от этой образующей и её проекции.

30. Провести сечение конуса плоскостью, проходящей через середину высоты конуса и данную хорду основания конуса.

31. Провести сечение конуса плоскостью, заданной следом на основании конуса и точкой на поверхности конуса.

32. Построить сечение конуса плоскостью, заданной тремя точками на боковой поверхности его.

33. Построить сечение конуса плоскостью, заданной тремя точками из которых

а) две лежат на боковой поверхности конуса, а одна на высоте;

б) две лежат на боковой поверхности конуса, а одна на основании конуса;

в) две лежат вне конуса, а одна внутри (должны быть заданы основания данных точек).

34. Построить сечение наибольшей площади, проходящее через образующую SA данного конуса.

Искомое сечение будет осевым не всегда, а лишь в том случае, когда угол при вершине осевого сечения не превышает 90°. В противном случае искомым сечением будет треугольник ASB, у которого угол ASB равен 90°.

35. Цилиндр и конус имеют общую высоту, основания их лежат в одной плоскости. Радиус основания конуса больше радиуса основания цилиндра. Построить линию пересечения поверхностей этих тел.

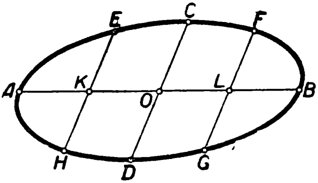
36. Около данной правильной четырёхугольной пирамиды описать конус.

37. Около данной правильной пятиугольной пирамиды описать конус.

38. В данный конус вписать правильную шестиугольную пирамиду.

Проведя сопряжённые диаметры эллипса AB и CD (центр O), построим через середины K и L отрезков AO и OB прямые EH и FG, параллельные CD. Вершинами искомой фигуры будут точки A, E, F, B, G и H (черт. 60).

39. Основание конуса вписано в основание правильной треугольной призмы, высота которой составляет $\frac{2}{3}$ высоты конуса. Построить линию пересечения поверхностей этих тел.



Черт. 60.

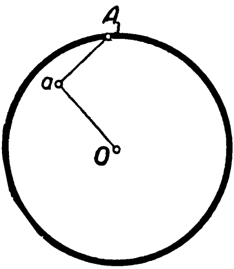
40. На изображении шара показан один полюс его. Построить второй полюс и экватор шара.

41. Дано изображение шара и изображение a точки A, лежащей на поверхности шара, причём для определённости считаем, что плоскость проекций проходит через центр шара. Найти расстояние точки A от плоскости проекций.

Проведём через точки A и O проектирующую плоскость. При вращении её около Oa (след плоскости) можно добиться совмещения её с плоскостью проекций. Тогда Aa займёт положение aA_1, причём aA_1 должно быть перпендикулярным Oa. Отсюда вытекает построение (черт. 61). Величина aA_1 называется высотой точки A.

42. Даны точки A и B на поверхности шара. Найти истинную величину отрезка AB.

Найдя высоты точек A и B, строим в точках a и b перпендикуляры к ab и откладываем на них $aM = aA_1$ и $bK = bB_1$, MK — искомое расстояние.



Черт. 61.

43. На поверхности шара даны три точки. Построить радиус окружности, проходящей через эти точки.

Найдя расстояния между этими точками (задача 42 этого параграфа), строим треугольник по трём сторонам и описываем около него окружность.

44. Прямая пересекает поверхность шара в точках A и B. Построить точку встречи прямой AB с плоскостью проекций.

45. Дана точка A вне шара. Найти точку встречи с поверхностью шара прямой, соединяющей точку A с центром шара.

46. Дано изображение шара. Построить изображение большого круга шара, проходящего через две данные на поверхности шара точки.

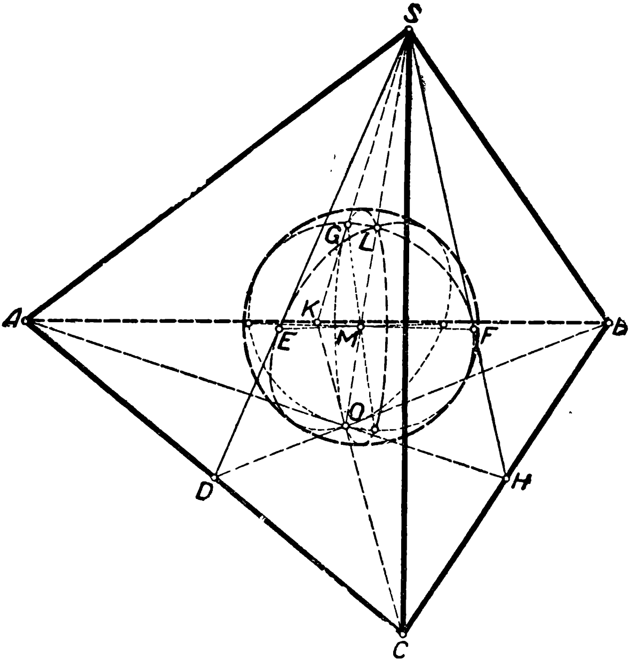
47. Даны две прямые, одна из которых пересекает данный шар в точках A и B, а вторая — в точках C и D. На этих прямых отмечены точки E и F. Найти истинную величину отрезка EF.

48. Прямая пересекает поверхность одного шара в точках A и B, а второго — в точке C и ещё одной, которую требуется построить.

49. В правильный тетраэдр вписать шар.

Так как очертание шара изображается кругом только в ортогональной проекции, то данный тетраэдр следует изобразить также в ортогональной проекции. Однако в ортогональной проекции изображение правильного тетраэдра не может быть в такой степени произвольным, как в косоугольной проекции. Чтобы избежать необходимых построений для изображения правильного тетраэдра, можно воспользоваться одной из известных в начертательной геометрии ортогональных проекций, например, изометрией, тогда данный тетраэдр изобразится так, как это показано на чертеже 62.

Легко доказать, что радиус искомого шара в 4 раза меньше высоты тетраэдра, а точки касания его с гранями лежат в центрах тяжести граней. Тогда нетрудно по сопряжённым диаметрам построить меридианы шара. Большая ось любого из эллипсов, изображающих меридианы, даёт диаметр очертания шара.



Черт. 62.

50. В правильную четырёхугольную пирамиду вписать шар.

51. В куб вписать шар.

52. В конус вписать шар; построить линию касания поверхностей этих тел.

53. В октаэдр вписать шар.

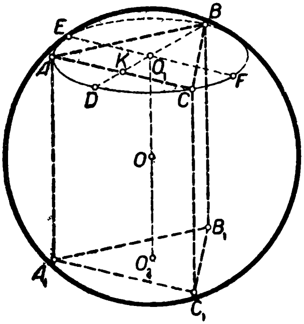
Учесть, что поверхность шара делит отрезок, соединяющий вершину октаэдра с центром шара, в отношении $(\sqrt{3}-1):1\approx3:4$.

54. В данный шар вписать правильную треугольную призму.

Строим один из параллельных кругов (верхний, черт. 63). Проводим в нём пару сопряжённых диаметров BD и EF, а затем изображение вписанного в этот круг правильного треугольника ABC. Далее соединяем центр круга O_1 с центром шара O и на продолжении O_1O отмечаем точку O_2 так, чтобы $OO_2 = OO_1$. Проводим $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel O_1O_2$ и, наконец, соединяем попарно точки A_1, B_1 и C_1.

55. В данный шар вписать правильную треугольную пирамиду.

56. В данный шар вписать правильную шестиугольную пирамиду.



Черт. 63.

57. В данный шар вписать октаэдр.

58. В данный шар вписать равносторонний конус.

59. В данный шар вписать равносторонний цилиндр.

60. Построить линию пересечения поверхности куба с поверхностью шара, касающегося всех рёбер куба.

61. Построить линию пересечения поверхности куба с поверхностью шара, делящего каждое ребро на три равные части.

62. Полушар и конус имеют общее основание. Вершина конуса находится вне полушара. Построить линию пересечения поверхностей этих тел.

63. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше стороны основания. Основание пирамиды вписано в основание полушара. Построить линию пересечения поверхностей этих тел.

64. Высота конуса служит диаметром шара. Построить линию пересечения поверхностей этих тел.